СКМ-9, Математика 10. Занятие от 20.03.2020

Тема: «Четырёхугольники, вписанные в окружность».

Цели и задачи::

1. обобщить знания о вписанном четырехугольнике;
2. вести поиск новых методов с помощью разбора олимпиадных задач;
3. выделить основные свойства, применяемые при решении задач;
4. привести блок полезных фактов по применению свойств вписанного четырехугольника.

**Описанная окружность четырехугольника.**
**Вписанный четырехугольник**





***Задача 1 (3 балла) Заполни пропуски:***

***а) Если окружность описана около параллелограмма, то этот параллелограмм-……, так как………………………………***

***б) Если окружность описана около трапеции, то эта трапеция -………., так как……………………..***

***Задача 2. (5 баллов)***

Докажите, что около выпуклого четырехугольника, образованного при пересечении биссектрис углов трапеции можно описать окружность.

Задача 3. (5 баллов)

* ***Дополнительный признак существования описанной окружности.***

Если ∠*ABD* = ∠*ACD*, то около выпуклого четырёхугольника АВСД можно описать окружность



Задача. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* углы *ABD* и *ACD* равны. Докажите, что углы *DAC* и *DBC* также равны.

Решение. Поскольку *ABCD-*выпуклый и ∠*ABD* = ∠*ACD*, получаем, что около четырёхугольника *ABCD*можно описать окружность. А тогда ∠*DAC* = ∠*DBC* как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу *CD*.

Задача 3. (3 балла). В треугольнике АВС АК и СТ - высоты, АС=10 см. а) Можно ли около четырёхугольника АТКС описать окружность? Если «да», то найдите радиус этой окружности

* **Теорема Птолемея.**

**Теорема Птолемея:** В любом вписанном четырехугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон, т.е. АС•ВD=AB•CD+BC•AD.

Рис. 1

**Доказательство**

Рассмотрим произвольный четырёхугольник *ABCD*, вписанный в окружность (рис.1).

Докажем, что справедливо равенство: АС•ВD=AB•CD+BC•AD.

      Для этого выберем на диагонали *AC* точку *E* так, чтобы угол *ABD* был равен углу *CBE* (рис. 2). рис. 2.

 Заметим, что [треугольник *ABD* подобен треугольнику *BCE*](https://www.resolventa.ru/demo/rus/trege.htm#str2). Действительно, у этих треугольников по два равных угла: угол *ABD* равен углу *CBE* (по построению точки *E*), угол *ADB* равен углу *ACB* (эти углы являются [вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу](https://www.resolventa.ru/spr/planimetry/cangle.htm#ca3)). Следовательно, [справедлива пропорция](https://www.resolventa.ru/demo/rus/trege.htm#str5):

откуда вытекает равенство: ВС ·АD=EC·BD (1)

Заметим, что [треугольник *ABE* подобен треугольнику *BCD*](https://www.resolventa.ru/demo/rus/trege.htm#str2). Действительно, у этих треугольников по два равных угла: угол *ABE* равен углу *DBC* (углы *ABD* и *EBC* равны по построению, угол *DBE* – общий), угол *BAC* равен углу *BDC* (эти углы являются [вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу](https://www.resolventa.ru/spr/planimetry/cangle.htm#ca3)). Следовательно, [справедлива пропорция](https://www.resolventa.ru/demo/rus/trege.htm#str5): 

откуда вытекает равенство: AB·CD=AE·BD (2)

      Складывая равенства (1) и (2), получаем:

АС•ВD=AB•CD+BC•AD.

      Теорема Птолемея доказана

Задача 4 (5 баллов).**В окружность вписан равнобедренный треугольник АВС (АВ = ВС). На дуге АВ взята произвольная точка К и соединена хордами с вершинами треугольника.**

**Доказать, что АК • КС = АВ2 – КВ2.**

Задача 5 (5 баллов).**Длины катетов прямоугольного треугольника равны а и в. На его гипотенузе во внешнюю сторону треугольника построен квадрат, одна из сторон которого совпадает с гипотенузой.**

**Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата. [3]**

Задача 6 (5 баллов)**. В равнобокой трапеции основание АD равно диагонали АС. Известно, что** **САD =****СDМ, где М – середина ВС.**

**Найти углы трапеции.**

Задача 7 (5 баллов).**Вокруг равностороннего треугольника АВС описана окружность радиуса R и на дуге ВС окружности взята точка М так, что дуга ВС делится этой точкой в отношении 1:3, считая от вершины В.**

**Найти расстояние АМ. [1]**

Задача 8 (5 баллов).**Доказать, что в равнобочной трапеции произведение длин оснований равно разности квадратов диагонали и боковой стороны. [2]**

**Разные задачи.**

Задача 9. (5 баллов). Четырехугольник со сторонами 25 см, 39 см, 52 см, 60 см вписан в окружность. Найти его площадь.

Задача 10. (5 баллов). В треугольнике *АВС* угол *С* равен 135°. На стороне *АВ* вне треугольника построен квадрат с центром *О*. Найдите *ОС*, если  *АВ* = 8

 Задача 11. (5 баллов). Окружность пересекает стороны АВ и АС треугольника АВС в точках К и Р соответственно и проходит через вершины В и С. Найти длину отрезка КР, если АК=6, а сторона АС в 1,5 раза больше стороны ВС.

*Подсказка – найди подобные треугольники*

*Комментарии к материалам занятия:*

*Срок выполнения заданий -07.04.2020.*

*Решения отправляем на почту:* *larisamat@mail.ru*

*Рейтинговая таблица с оценкой решённых задач будет опубликована 10.04.2020 на сайте ФМШ*