**Математическая игра «Домино». Старт-лига 27.11.2021.**

**Решения.**

**0-0.** В каждой клетке квадрата размером 5×5 клеток провели ровно одну диагональ. Вершина клетки свободна, если она не является концом никакой из проведённых диагоналей. Найдите наибольшее возможное количество свободных вершин.

**Ответ**

18 вершин.

**Решение**



Пример. На каждой из шести горизонтальных линий три вершины являются свободными.

Оценка. Суммарное количество вершин 6 = 36. Выделим девять клеток, не⋅клеток: 6 имеющих общих вершин. Они содержат все 36 вершин. В каждой клетке проведена диагональ, поэтому в ней две вершины не свободны. Значит, использовано не менее, чем 18 вершин, поэтому свободными могут оказаться не более, чем 36 – 18 = 18.

**0-1.** Из числа 1234512345123451234512345 вычеркните 10 цифр так, чтобы оставшееся число было максимально возможным.

### Ответ

Максимальное число это 553451234512345.

**0-2.** Все костяшки домино выложили в цепь. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков на другом конце?

### Ответ

5 очков.

**Решение**

Пятерка на половинках доминошек встречается 8 раз. Внутри цепочки все пятерки разбиты на пары. Без пары осталась пятерка на конце. Значит, оставшаяся пятерка находится на другом конце.

**0-3.** На уроке физкультуры весь класс выстроился по росту (у всех детей разный рост). Дима заметил, что людей, которые выше него, в четыре раза больше, чем людей, которые ниже него. А Лёня заметил, что людей, которые выше него, в три раза меньше, чем людей, которые ниже него. Сколько всего человек в классе, если известно, что их не больше 30?

**Ответ**

21 человек.

**Решение**

Пусть x — количество людей, которые ниже Димы. Тогда всего в классе учится x (люди, которые ниже Димы) + 4x (люди, которые выше Димы) + 1 (Дима) = 5x + 1 (всего людей в классе). Пусть y — количество людей, которые выше Лёни. Тогда всего в классе учится y (люди, которые выше Лёни) + 3y (люди, которые ниже Лёни) + 1 (Лёня) = 4y + 1 (всего людей в классе). Тогда, если из количества детей в классе вычесть 1, то полученное число будет делиться и на 4, и на 5. То есть будет делится на 20. В нужном диапазоне такое число только одно — 20, то есть всего в классе 21 человек.

**0-4.** Дима, Миша и Юра решили выяснить, кто из них самый спортивный. Для этого они провели 10 состязаний. Победитель получал 3 балла, занявший второе место — 1 балл, а занявший третье место ничего не получал (в каждом состязании было первое, второе и третье места). В сумме Дима набрал 22 балла, а Миша — 8 баллов. Сколько баллов набрал Юра?

**Ответ**

10 баллов.

**Решение**

В каждом состязании мальчики в сумме получали 3 + 1 + 0 = 4 балла. За все состязания они набрали 4 ⋅ 10 = 40 баллов. Дима и Миша в сумме набрали 22 + 8 = 30 баллов, значит, оставшиеся 40 − 30 = 10 баллов набрал Юра.

**0-5.** Сколькими способами можно поставить 8 ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга (ладья может двигаться на любое число полей по горизонтали или по вертикали)?

**Ответ**

8!=40320 способами.

**Решение 1**

В каждой вертикали находится по одной ладье. Их положение определяется перестановкой горизонталей.

**Решение 2**

Ладья на первой горизонтали может занимать 8 разных положений. Если это положение фиксировано, то ладья на второй горизонтали может занимать уже только 7 положений. Аналогично для ладьи на третьей горизонтали остается 6 вариантов и т. д. Итого  8·7·6·5·4·3·2 = 8!  способов.

**0-6.** На острове рыцарей и лжецов живут 2021 человек. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Во время социологического опроса каждый житель острова заявил: «Среди остальных островитян более половины – лжецы». Сколько лжецов живет на острове?

**Ответ**

1011 лжецов.

**Решение**

Пусть на острове нет ни одного рыцаря. Тогда все жители острова лжецы и при опросе они сказали правду, чего не могло быть. Значит, есть хотя бы один рыцарь, сказавший правду. Значит, лжецов больше чем 2020/2=1010.

Теперь рассмотрим одного из лжецов. Он соврал, значит, среди остальных островитян не более половины лжецы. Значит, число лжецов, не считая опрашиваемого, меньше или равно 1010. Значит, на острове 1011 лжецов и 1010 рыцарей.

**1-1.** В стакане находятся бактерии. Через секунду каждая из бактерий делится пополам, затем каждая из получившихся бактерий через секунду делится пополам и так далее. Через минуту стакан полон. Через какое время стакан был заполнен наполовину?

### Ответ

Через 59 секунд.

**1-2.** Три студентки Анна, Вика и Маша учатся на литературном, историческом и биологическом факультетах. Если Анна литератор, то Маша не историк. Если Вика не историк, то Анна литератор. Если Маша не литератор, то Вика – биолог. Кто из девочек на каком факультете учится?

**Ответ**

Вика – историк, Анна – биолог, Маша – литератор.

**Решение**

Предположим, что Вика не историк, тогда (по условию 2) Анна литератор, но если Анна литератор, тогда Маша не историк — получилось явное противоречие. Значит, Вика — историк. Тогда Маша литератор — иначе (по условию 3) Вика была бы биологом. Значит, Анна — биолог.

**1-3.** Во время математического тестирования Олег должен был разделить данное число на 2, а к результату прибавить 6. Но он поторопился и вместо этого умножил данное число на 2, а от результата отнял 6. Тем не менее, ответ у него получился правильный. Какое число было дано Олегу?

**Ответ**

8.

**Решение**

Поскольку Олег умножил число на 2 вместо того, чтобы поделить, то на этом шаге он получил результат, который в четыре раза больше необходимого. Значит, разность между этими двумя результатами в три раза больше, чем необходимый результат. Но из условия следует, что эта разность равна 6 + 6 = 12. Значит, необходимый результат равен 12 : 3 = 4. Тогда загаданное число равно 4 · 2 = 8.

**1-4.** Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 439, а номер последней записывается теми же цифрами в каком-то другом порядке. Сколько страниц в выпавшем куске?

### Ответ

496 страниц (248 листов).

**Решение**

Последняя страница имеет четный номер больший чем 439. Значит, из вариантов 349, 394, 493, 934, 943 нам подходит только 934. Тогда выпавших страниц 934-439+1=496.

**1-5.** Трёхзначное число в 56 раз больше своей последней цифры. Во сколько раз оно больше своей первой цифры?

**Ответ**

112.

**Решение**

Способ 1. Последняя цифра такова, что при умножении её на 6 полученное число будет оканчиваться на неё же. Полным перебором убеждаемся, что это может быть любая чётная цифра (и только она). Значит, это трёхзначное число либо 112, либо 224, либо 336, либо 448 (вариант с последней цифрой 0 не годится, так как получится не трёхзначное число). Во всех ситуациях ответ 112.

Способ 2. Пусть число имеет вид abc. Тогда по условию 100a + 10b + c = 56c, откуда 20a + 2b = 11c. Число 11c, следовательно, кратно 2, то есть цифра c — чётна, c = 2d (d 6 4). Значит, 10a + b = 11d. Но 10a + b = ab. В силу того, что это число делится без остатка на 11, a = b. Тогда d = a и исходное число имеет вид aa(2a) = a · 112, то есть оно больше своей первой цифры в 112 раз.

**1-6.** На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды 15 аборигенов, среди которых были как рыцари, так и лжецы, встали в хоровод, и каждый произнёс: «Из двух людей, стоящих напротив меня, один — рыцарь, а другой — лжец». Сколько среди них рыцарей?

**Ответ**

10 рыцарей.

**Решение**

Рассмотрим любого рыцаря. Он говорит правду, значит, напротив него стоят рыцарь и лжец. Один из людей напротив найденного лжеца — исходный рыцарь, значит, рядом с ним стоит ещё один рыцарь. Напротив этого нового рыцаря стоит найденный ранее лжец и ещё один человек, который должен быть рыцарем. Повторяя эти рассуждения, видим, что в кругу идут два рыцаря, затем один лжец, потом снова два рыцаря, затем ещё один лжец и так далее. Значит, лжецы составляют треть от общего числа участников. Тогда лжецов 15 : 3 = 5, а рыцарей 15 − 5 = 10

**2-2.** 9 одинаковых конфет стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких же конфет – 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна конфета?

**Ответ**

1р. 23коп.

**Решение**

9 конфет стоят 11 рублей с копейками, т.е. не меньше 11 рублей, что составляет 1100 копеек. Значит, одна конфета не может стоить меньше 123 копеек. 13 конфет стоят 15 рублей с копейками, т.е. строго меньше 16 рублей, что составляет 1600 копеек. Значит, одна конфета не может стоить больше 123 копеек.

**2-3.** Гонец ехал на лошади, чтобы доставить послание Илье Муромцу. В какой-то момент он заметил, что Илья Муромец прошёл мимо него (и продолжает идти в противоположном направлении). Спустя 10 секунд (когда лошадь остановилась) гонец спешился и побежал догонять Илью. Через сколько секунд после остановки лошади гонец доставит послание, если он бежит в два раза быстрее Ильи Муромца, но в пять раз медленнее скачущей лошади?

**Ответ**

110.

**Решение**

Пусть Илья Муромец идёт со скоростью x метров в секунду. Тогда скорость гонца — 2x, а скорость лошади — 10x. Получается, через 10 секунд после встречи расстояние между гонцом и лошадью будет 10 · x (прошёл Илья Муромец) +10 · 10x (проехала лошадь до полной остановки) = 110x. После этого скорость сближения гонца и Ильи Муромца равна 2x − x = x. Таким образом, гонец доставит послание через 110 секунд.

**2-4.** В январе некоторого года было четыре пятницы и четыре понедельника. Каким днем недели было 20-е число этого месяца?

### Ответ

Воскресенье.

**2-5.** Имеется 19 гирек весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 19 г. Девять из них – железные, девять – бронзовые и одна – золотая. Известно, что общий вес всех железных гирек на 90 г больше, чем общий вес бронзовых. Найдите вес золотой гирьки.

### Ответ

Золотая гирька весит 10 г.

### Решение

Разность между общим весом девяти самых тяжёлых гирь и общим весом девяти самых лёгких равна  (19 + 18 + ... + 11) – (9 + 8 + ... + 1) = 90 г.  Поэтому железные гири – самые тяжёлые, а бронзовые – самые лёгкие (иначе разность между общим весом железных гирь и общим весом бронзовых была бы меньше). Значит, золотая гирька весит 10 г.

**2-6.** В ряд выписано 11 чисел так, что сумма любых трёх идущих подряд чисел равна 18. При этом сумма всех чисел равна 64. Найдите центральное число.

**Ответ**

8.

**Решение**

Пронумеруем числа слева направо от 1 до 11. Заметим, что сумма центральных пяти чисел (с четвёртого до восьмого) равна 64 (сумма всех чисел) − 2 · 18 (сумма чисел в первой и в последней тройках) = 28. Тогда шестое (центральное) число равно 18 (сумма четвёртого, пятого и шестого чисел) + 18 (сумма шестого, седьмого и восьмого чисел) − 28 (сумма центральных пяти чисел) = 8.

**3-3.** На балу собрались принцессы и рыцари — всего 22 человека. Первая принцесса потанцевала с семью рыцарями, вторая — с восемью рыцарями, третья — с девятью рыцарями, …, последняя потанцевала со всеми присутствующими рыцарями. Сколько всего принцесс было на балу?

**Ответ**

8 принцесс.

**Решение**

Заметим, что количество рыцарей, с которыми потанцевала принцесса, на 6 больше, чем её номер. Пусть было всего 𝑥 принцесс, тогда последняя имеет номер 𝑥 и потанцевала со всеми рыцарями, и их всего 𝑥 + 6. Получаем, что всего на балу было 𝑥 + (𝑥 + 6) = 2𝑥 + 6 = 22 человек, а значит, принцесс было 8.

**3-4.** Найдите все возможные прямоугольники с целыми сторонами, у каждого из которых периметр в два раза меньше площади. Ответ запишите в виде (a,b), где a – длина прямоугольника, b – ширина. Ответы (a,b) и (b,a) одинаковые.

**Ответ**

(5;20), (6;12), (8;8).

**Решение**

Обозначим стороны прямоугольника за *a* и *b*. Тогда:

$$ab=2∙2\left(a+b\right); $$

$$ab-4a=4b;$$

$$a=\frac{4b}{b-4}=\frac{4b-16+16}{b-4}=4+\frac{16}{b-4}.$$

Так как *b* целочисленное, больше нуля и должно являться делителем числа 16, то *b-4* может равняться -2, -1, 1, 2, 4, 8, 16. С учетом того, что *a* должно быть больше нуля, получаем три различных прямоугольника со сторонами (5;20), (6;12), (8;8).

**3-5**. В какое максимальное количество различных цветов можно раскрасить клетки таблицы 3 × 3 (каждую клетку — одним цветом) так, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющие общую сторону.

**Ответ**

5 цветов.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1** | **2** | **4** |
| **3** | **55** | **1** |
| **2** | **4** | **3** |

**Решение**

В задаче требуется, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющие общую сторону. Пусть наибольшее число цветов — n. Тогда число таких пар цветов n (n−1) 2 . (Первую клетку можно выбрать n способами, а вторую клетку, имеющую с первой общую сторону, уже (n−1) способами, так как один цвет уже занят. Но одну и ту же пару мы посчитали дважды, поэтому число таких пар n (n−1) 2 ). Так как отрезков, по которым соседствуют две клетки, всего 12, то n (n−1) 2 6 12. Подставляя в это неравенство различные значения n, приходим к выводу, что наибольшее такое n, удовлетворяющее неравенству, n = 5. Следовательно, наибольшее число цветов — 5.

**3-6.** У Кощея Бессмертного есть 11 больших сундуков. В некоторых из них лежит по 8 средних сундуков. А в некоторых средних лежит по 8 маленьких сундуков. В сундуках больше ничего не лежит. Всего у Кощея 102 пустых сундука. Сколько всего сундуков у Кощея?

**Ответ**

115 сундуков.

**Решение**

Пусть x — количество непустых сундуков. Рассмотрим процесс, когда Кощей только начал помещать сундуки друг в друга. Первоначально у него было 11 пустых больших сундуков. Каждый раз, когда он клал в какой-то пустой сундук 8 сундуков меньшего размера, общее количество пустых сундуков увеличивалось на 7 (−1 старый пустой сундук и +8 новых пустых сундуков). Получается уравнение 11 + 7x = 102. Тогда x = 13. А всего сундуков у Кощея 115.

**4-4.** Сколько клеток пересекает диагональ в клетчатом прямоугольнике размерами 199 × 991?

**Ответ**

1189 клеток.

### Решение

Чтобы попасть из нижнего левого угла прямоугольника в правый верхний, мы должны пересечь каждую горизонталь и вертикаль в клетчатом прямоугольнике, а при их пересечение мы попадаем в новую клетку. 199 и 991 взаимно простые числа, значит, ни в одной точке мы не пересекаем и горизонталь и вертикаль одновременно. Тогда мы пересекаем 198 вертикалей и 990 горизонталей. Значит, с учётом стартовой клетки, диагональ пересекает 198+990+1=1189 клеток.

**4-5.** Как разложить по семи кошелькам 127 рублевых бумажек так, чтобы любую сумму от 1 до 127 рублей можно было бы выдать, не открывая кошельков? В ответ напишите количество денег в каждом кошельке через запятую.

### Решение

127 бумажек надо разложить так: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64.

**4-6.** У бабушки в саду созрели яблоки: антоновка, грушовка и белый налив. Если бы антоновки было втрое больше, то суммарное количество яблок выросло бы на 70%. Если бы втрое больше было грушовки, то оно выросло бы на 50%. Увеличилось или уменьшилось бы суммарное количество яблок, если бы втрое больше было белого налива? А на сколько процентов?

**Ответ**

Увеличилось на 80%.

**Решение**

Первый способ. Если бы каждого сорта яблок было втрое больше, то суммарное количество яблок увеличилось бы на 200%. Из них 70% составляет увеличение за счёт антоновки, 50% – увеличение за счёт грушовки. Значит, увеличение за счёт белого налива составит 200% – 70% – 50% = 80%. Второй способ. Так как прибавление удвоенного количества антоновки даёт рост 70%, то антоновка составляет 0,35 от всех яблок. Аналогично, грушовка составляет 0,25 от всех яблок. Значит, доля белого налива – 0,4. Если к числу дважды прибавить по 0,4, то число вырастет на 80%.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**5-5.** Клетки квадрата 10×10 покрашены в черный и белый цвет таким образом, что в любом прямоугольнике 1×2 хотя бы одна клетка черная, а в любом прямоугольнике 1×6 найдутся две черные клетки, расположенные подряд. Какое наименьшее число черных клеток в таком квадрате?

**Ответ**

60 клеток.

**Решение**

В любой полоске 1×5 не менее трех черных клеток. Действительно, поскольку в каждой полоске 1×2 есть хотя бы одна черная клетка, то если в полоске 1×5 менее трех черных клеток, то их две (они соседние с центральной). Но тогда в полоске 1×6, содержащей рассмотренную полоску 1×5, нет двух черных клеток подряд. Итак, во всем квадрате не менее 60 черных клеток (3/5 общего количества). Пример, где ровно 60 черных клеток:

**5-6.** В поезде 18 одинаковых вагонов. В некоторых вагонах свободна ровно половина мест, в некоторых других – ровно треть мест, а в остальных заняты все места. При этом во всём поезде свободна ровно одна девятая всех мест. В скольких вагонах все места заняты?

**Ответ**

В 13 вагонах.

**Решение**

Примем за единицу количество пассажиров в каждом вагоне. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Так как в поезде свободна ровно одна девятая часть всех мест, то это равнозначно тому, что полностью свободны два вагона. Число 2 единственным ⋅образом раскладывается в сумму третьих частей и половин: 2 = 3 1 3 ⋅+ 2 1 2 . Это означает, что свободные места есть в пяти вагонах, поэтому в13 вагонах все места заняты.

Второй способ. Пусть в x вагонах свободна половина мест, а в y вагонах – треть мест. Тогда ⋅ = ⋅ y + ⋅x 1 2 1 3 18 1 9 . Избавившись от знаменателей дробей, получим: 3x + 2y = 12. Так как x и y – натуральные числа, то перебором убеждаемся, что x = 2, y = 3. Тогда искомое количество вагонов: 18 – 2 – 3 = 13. Найти натуральные решения уравнения 3x + 2y = 12 можно также из соображений делимости, если выразить одну переменную через другую.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

**6-6.** Окно имеет следующую форму :

Художник Вася Птичкин раскрасил 3 квадрата этого окна в один цвет так, чтобы вид из комнаты и с улицы на окно был одинаковым. Сколько всего существует различных способов раскраски?

**Ответ**

10.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 1 | 1 |  |  | 1 |  |  |  | 1 |  |  | 1 |  | 1 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 1 |  | 1 |  |  |  |  |  |  | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  | 1 |  | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 1 |  | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | 1 |  |
|  | 1 |  |  |  |  |  |  | 1 |  | 1 |  |  |  |  |  |  | 1 |  |
| 1 |  | 1 |  |  | 1 |  |  |  | 1 |  |  | 1 | 1 | 1 |  |  | 1 |  |