МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 10 КЛАСС

1. Может ли дискриминант квадратного уравнения с целыми коэффициентами быть равным 2022?
2. Даны положительные числа a и b, удовлетворяющие условию a3+ab–b3 = (a+b)2. Чему может быть равна разность a–b?
3. На доске написаны числа 2011, 2021, 2031. Разрешается написать на доске сумму двух из них минус третье, после чего стереть то

число, которое вычиталось. Через некоторое время на доске ока-

зались три числа, среднее из которых равно 10001. Какие были два

остальных?

1. Три пушки начинают стрелять одновременно. Интервалы между выстрелами для этих пушек составляют 4/3 секунды, 5/3 секунды и 2 секунды соответственно. Совпавшие во времени выстрелы воспринимаются за один. Сколько выстрелов будет услышано за 1 минуту? (Первый выстрел также считается.)
2. Миллионзначное натуральное число назовём кошачьим, если оно делится на произведение своих цифр. Сколько последовательных натуральных чисел могут быть кошачьими?
3. Длины медиан треугольника равны 3, 4 и 5. Найдите угол между двумя меньшими медианами.
4. Дана шахматная доска. Разрешается перекрашивать в другой цвет сразу все клетки, расположенные внутри квадрата размером 2×2. Может ли при этом на доске остаться ровно одна черная клетка?
5. Найдите все натуральные числа n, для которых сумма

1! + 2! + 3! + … + n! является точным квадратом.

**Решение**

1. Ответ. Нет, так как условие в2-4ас=2022 не может быть выполнено, так как 4ас делится на 4, выражение в2 при делении на 4 может давать остатки 0 или 1, а 2022 при делении на 4 даёт остаток 2 что невозможно.
2. Ответ.*a–b* = 1.Решение.*a*3+*ab*–*b*3 = (*a*+*b*)2;

 (*a*–*b*)(*a*2+*ab*+*b*2)+*ab* = *a*2+2*ab*+*b*2; (*a*–*b*–1)(*a*2+*ab*+*b*2) = 0. Так как *a*2+*ab*+*b*2 > 0, то *a*–*b*–1 = 0, откуда и получаем ответ.

3. 9991 и 10011. Исходные числа образуют арифметическую прогрессию с разностью 10. Нетрудно проверить, что это свойство –– инвариант: из тройки (*n* − 10, *n*, *n* + 10) получается либо она сама, либо одна из троек (*n*−20, *n*−10, *n*), (*n*, *n*+10, *n*+20).

1. 85. Первая пушка за минуту сделает 60:4/3+1=46 выстрелов. Вторая и третья - соответственно 37 и 31 выстрел. Выстрелы первой и второй совпадают через 20/3 секунды, и всего они совпадут 10 раз. Выстрелы первой и третьей – 16 раз, второй и третьей – 7 раз, а выстрелы всех трёх пушек совпадут 4 раза. Тогда согласно формуле включений-исключений будет услышано 46+37+31-10-16-7+4=85 выстрелов)
2. 1, 2 или 3. Пример трёх таких чисел:

1…1 делится на 1;

1…12 делится на 2;

1…13 делится на 3.

Оценка. Рассмотрим четыре подряд идущих числа. Среди них есть два чётных, одно из которых не делится на 4. Докажем, что произведение его цифр кратно 4 (в частности, может равняться нулю) и поэтому оно не кошачье. Действительно, если его последняя цифра кратна 4, то произведение цифр кратно 4. Если же последняя цифра 2 или 6, то предпоследняя цифра чётна (иначе по признаку число делилось бы на 4), поэтому произведение цифр кратно 4.

**6.** Пусть ABC — данный треугольник, AD = 3, BE = 4, CF = 5 — медианы, M — точка пересечения медиан. M делит медианы в отношении 2:1, считая от вершин. Отметим на медианы точки, делящие каждую из них на три равные части (рис.) . Пусть K — такая точка деления на медиане BE. Стороны FM и MK треугольника FMK совпадают с третями медиан CF и BE соответственно, сторона FK является средней линией треугольника ABM, поэтому параллельна AM и равна ½AM, то есть совпадает (и по направлению, и по длине) с третью медианы AD. Углы треугольника FMK равны углам между медианами. Нас интересует угол между AD и BE, то есть ∠FKM. Поскольку FM² = (⅓·5)² = (⅓·3²) + (⅓·4)² = FK² + KM², треугольник FMK прямоугольный, ∠FKM = 90°.

1. При перекрашивании квадрата 2×2, содержащего *k* черных и

4 - *k* белых клеток, получится 4 - *k* черных и *k* белых клеток. Поэтому число черных клеток изменится на (4 - *k*) - *k* = 4 - 2*k*, т. е. на четное число. Так как четность числа черных клеток сохраняется, из исходных 32 черных клеток мы не сможем получить одну черную клетку.



1. Ответ. n= 3 (единств.) Решение.1! + 2! + 3! = 9. При n> 3 последняя цифра суммы факториалов равна 3**.**