**Математическая игра «Домино». 16 апреля 2022 года. Гранд-лига***.* **Решения**.

**0-0**. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена:

**Ответ:** 1.

**Решение.**

Сумма коэффициентов многочлена равна значению этого многочлена при x=1.

**0-1**. Коля и Вася живут в одном доме. В каждом подъезде дома по 4 квартиры на этаже. Коля живет на пятом этаже в 83 квартире, Вася – на третьем этаже в 169 квартире. Сколько этажей в доме?

**Ответ:** в доме – 8 этажей.

**Решение.**

Представим, что в доме – только один подъезд. Так как 83=4·20+3, а 169=4·42+1, то в этом случае, Коля жил бы на 21 этаже, а Вася – на 43 этаже. Пусть n – реальное количество этажей в доме, тогда из условия задачи и предыдущего рассуждения следует что и . Следовательно, 21-5=16 кратно числу n и 43-3=40 кратно числу n. Учитывая, что , получим, что .

**0-2**. По окружности выписано 10 чисел, сумма которых равна 100. Известно, что сумма каждых трёх чисел, стоящих рядом, не меньше 29. Укажите такое наименьшее число *А*, что в любом таком наборе чисел каждое из чисел не превосходит *А*.

**Ответ:** 13.

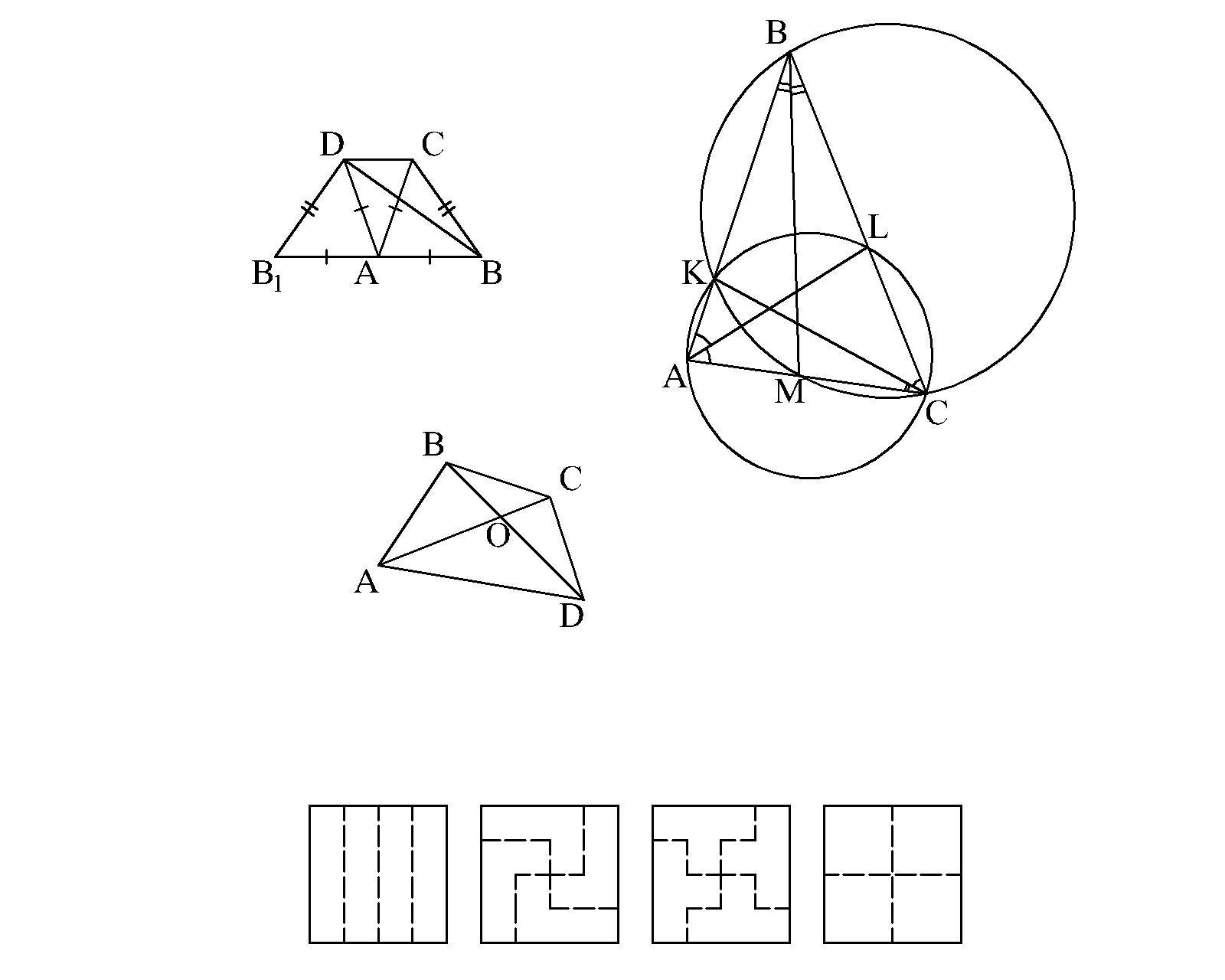
**Решение.**

Пусть *X* – наибольшее из чисел. Оставшиеся числа разобьём на три тройки "соседей". Сумма чисел в каждой такой тройке не меньше 29, следовательно, *X* ≤ 100 – 3·29 = 13.

Пример набора с максимальным числом 13:  13, 9, 10, 10, 9, 10, 10, 9, 10, 10.

**0-3**. Квадрат 4х4 разрезают по границам клеток на четыре равных многоугольника. Сколькими способами это можно сделать (способы считаются различными, если при разрезании получаются неравные многоугольники)?

**Ответ:** 4.

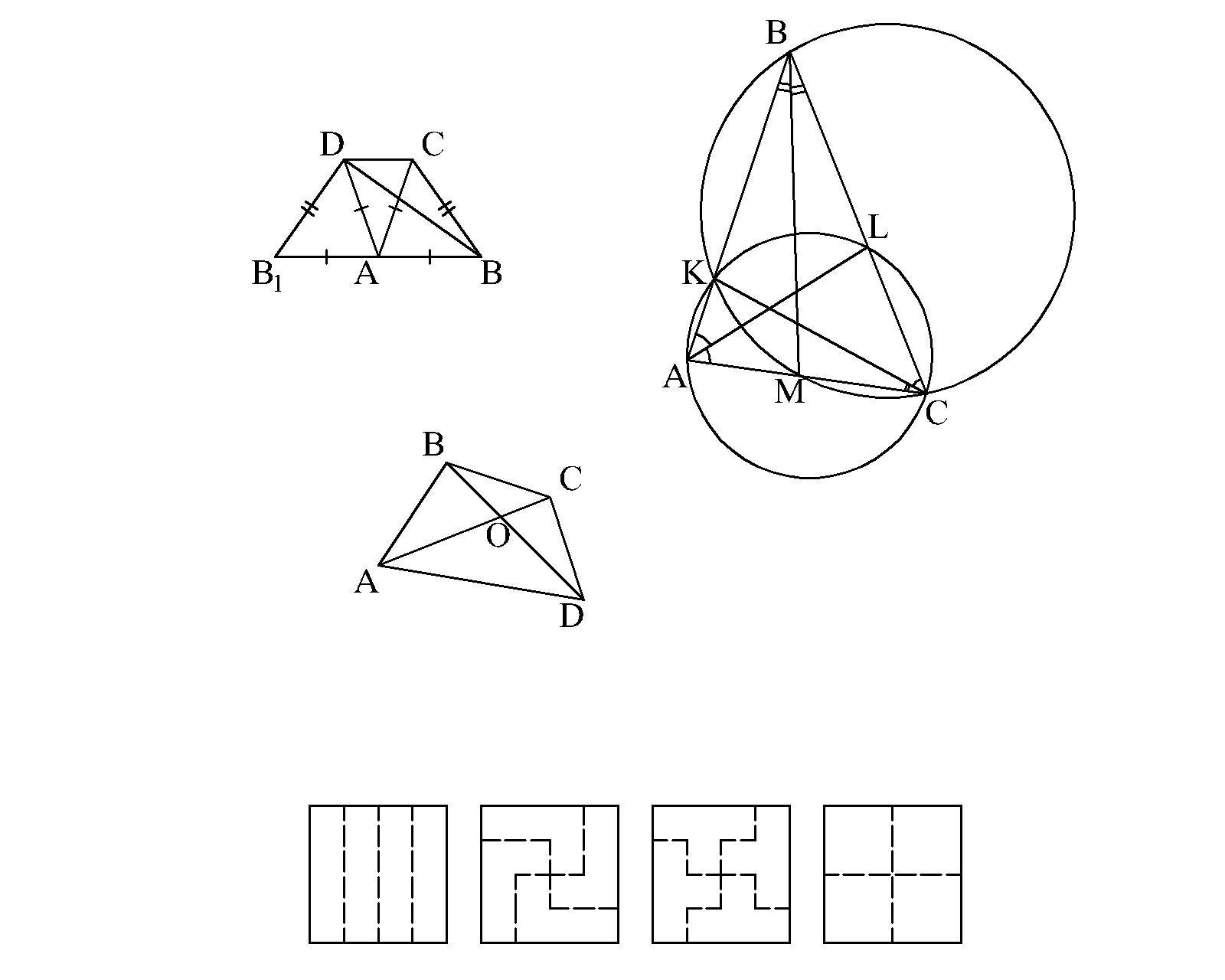
**Решение.**

Существует всего пять различных видов многоугольников, состоящих из четырех клеток. Четыре возможных варианта приведены ниже. Ещё один вид получить указанным разрезанием невозможно.

**0-4**. Диагонали выпуклого четырехугольника делят его на четыре треугольника. Площади трех из них равны 1, 2 и 3. Найдите площадь четырехугольника.

**Ответ:** 12, 7,5 или .

**Решение.**

****Пусть дан выпуклый четырехугольник , O – точка пересечения его диагоналей. Воспользуемся утверждением: , которое несложно доказать, если записать площадь каждого из этих треугольников как половину произведения длин их сторон и синуса угла между ними. Возможны три различных случая взаимного расположения треугольников с известными площадями, поэтому обозначив за x площадь четвертого из получившихся треугольников, получим совокупность трех уравнений: или или . Откуда получаем что площадь четырехугольника может быть равной 12, 7,5 или .

**0-5**. При каких значениях один из корней уравнения больше 1, а другой – меньше 1?

**Ответ:** при .

**Решение.**

Так как для любого действительного числа a верно неравенство , то функция является квадратичной. Её график – парабола, расположенная «ветвями» вверх. Условие задачи равносильно тому, что график имеет две точки пересечения с осью абсцисс, а число 1 лежит на этой оси между точками пересечении. Для этого, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: . Решив неравенство, получим .

**0-6**. В трамвае ехало 60 человек: контролёры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролёры (граждане, выдававшие себя за контролеров), и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжеконролёров и лжекондукторов в 4 раза меньше количества настоящих кондукторов и контролёров. Общее количество контролёров и лжеконтролёров в 7 раз больше общего количества кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров?

**Ответ:** 20 обычных пассажиров.

**Решение.**

Общее количество лжеконтролёров и лжекондукторов в пять раз меньше количества необычных пассажиров ( то есть контролёров, кондукторов, лжеконролёров и лжекондукторов). Следовательно, количество необычных пассажиров кратно 5. Аналогично, количество кондукторов и лжекондукторов в восемь раз меньше количества необычных пассажиров, следовательно, количество необычных пассажиров кратно 8. Таким образом, количество необычных пассажиров кратно 40 и при этом не превосходит 60. Значит, всего имеется 40 необычных пассажиров, а остальные 20 пассажиров – обычные.

**1-1**. Даны пятьдесят различных натуральных чисел, двадцать пять из которых не превосходят 50, а остальные больше 50, но не превосходят 100. При этом никакие два из них не отличаются ровно на 50. Найдите сумму этих чисел.

**Ответ:** 2525.

**Решение.**

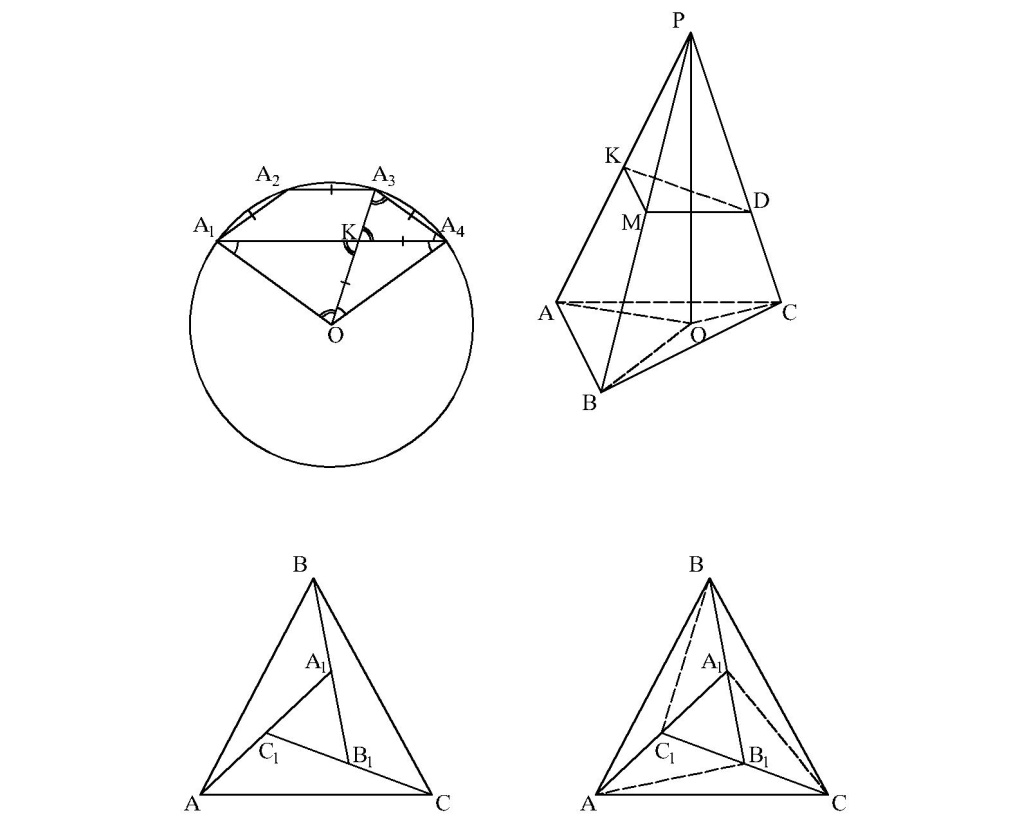
Вычтем 50 из каждого числа, которое больше 50. Получатся 50 разных чисел, то есть числа от 1 до 50. Их сумма равна 1 + 2 + … + 50 = 25·51, а сумма исходных чисел – 25·51 + 25·50 = 25·101.

**1-2**. Сплав состоит из цинка и меди, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы, но в отношении 2:3. Сколько частей каждого из данных сплавов нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий цинк и медь в отношении 17:27?

**Ответ:** сплавы надо взять в отношении 9:35.

**Решение.**

Пусть масса третьего сплава равна 1 и в нем содержится x частей первого сплава и (1-x) частей второго сплава. Выразив количество цинка в каждом из данных сплавов, составим уравнение . Отсюда, , .



**1-3**. Найдите , если , , , .

**Ответ:** .

**Решение.**

Проведем отрезки и . Используя свойство медианы треугольника, получим, что все семь образовавшихся треугольников имеют равные площади. Следовательно, площадь треугольника равна .

**1-4**. На какую наибольшую степень числа 2 может делиться выражение при целых значениях n?

**Ответ:** 22.

**Решение.**

*.*Так как числа n и n+4 имеют одинаковую четность, то исходное выражение делится на 2 тогда и только тогда, когда n – нечетное число. Подставим , получаем, что данное выражение равно , а значит, оно делится на 4. Так как k и k+1 – числа разной четности, то – нечетное число. Поэтому на большую степень двойки исходное выражение делиться не может.

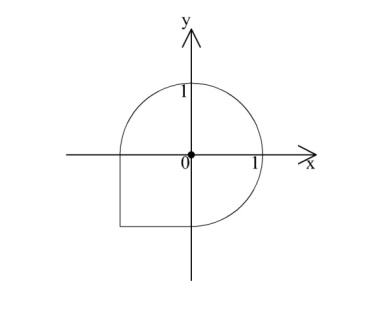
**1-5**. При каких натуральных n число (всего 2n цифр) делится на 63?

**Ответ:** при .

**Решение.**

Для того, чтобы число делилось на 63, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 7 и на 9. Сумма цифр числа А равна ; НОД(4; 9)=1, значит, А кратно 9 тогда и только тогда, когда n кратно 9. Число 131313 делится на 7, что можно проверить непосредственно делением в столбик или получить из более общего факта: =3·7·13·37·. Таким образом, .

**1-6**. Найдите площадь фигуры, которая задана на координатной плоскости системой неравенств:

**Ответ:.**

**Решение.**

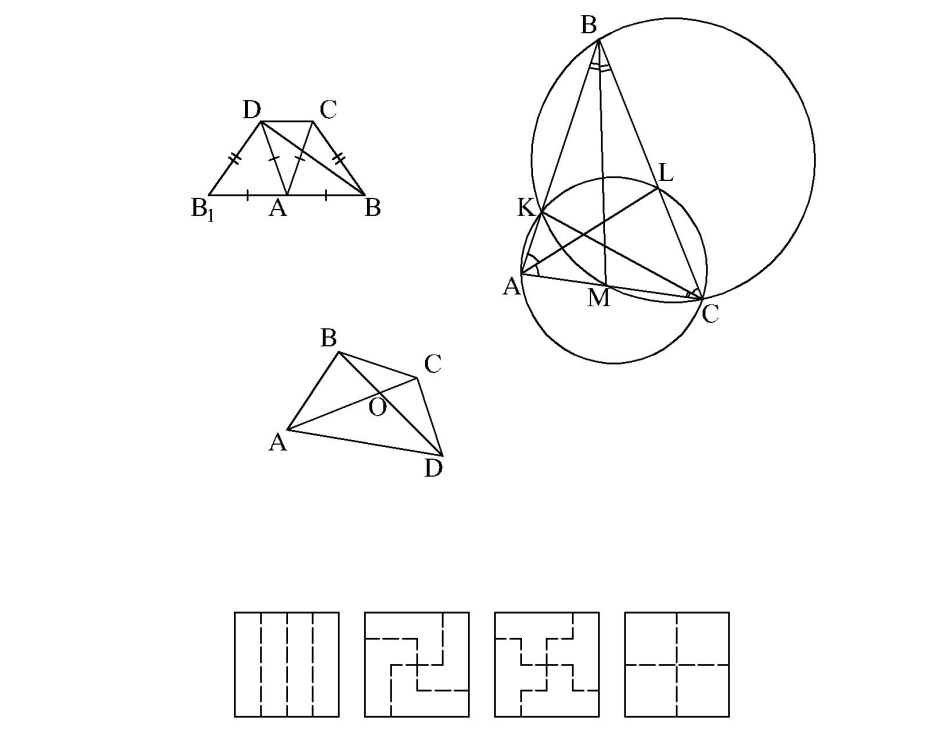
Выражения, входящие в данную систему, имеют смысл, если и . Если и , то, с указанными ограничениями выполняются оба неравенства, в остальных случаях данная система равносильна неравенству . Площадь получившейся фигуры равна сумме площадей «единичного квадрата» и кругового сектора, составляющего три четверти «единичного круга».

**2-2**. Решите уравнение в целых числах: .

**Ответ:**

**Решение.**

Разложим левую часть уравнения на множители. Имеем: . При любых целых n выражение принимает положительные значения, следовательно , а, значит, . Если , то получим одно решение: . Если же , то левая часть уравнения (значит, и правая) принимает только натуральные значения (причем каждый из сомножителей в левой части больше единицы), значит, n – натуральное число. Тогда, значений каждого множителя из левой части уравнения должно быть натуральной степенью трех. Если делится на 3, то , где . Тогда не делится на 3. Значит, одновременно делиться на три оба множителя не могут.

**2-3**. и – биссектрисы треугольника . Окружности описанные около треугольника и , вторично пересекаются в точке , лежащей на стороне . Найдите величину угла .

**Ответ**:.

**Решение.**

Проведём отрезок CK. (эти углы вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу). Аналогично, . Так как , то искомый угол в три раза меньше, чем сумма углов треугольника ABC, то есть равен .

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| б |  | б | ч | б |  | б | ч |
|  | б | ч | б |  | б | ч | б |
| б | ч | б |  | б | ч | б |  |
| ч | б |  | б | ч | б |  | б |
| б |  | б | ч | б |  | б | ч |
|  | б | ч | б |  | б | ч | б |
| б | ч | б |  | б | ч | б |  |
| ч | б |  | б | ч | б |  | б |

**2-4**. Какое наибольшее число белых и чёрных фишек можно расставить на шахматной доске так, чтобы на каждой горизонтали и на каждой вертикали белых фишек было ровно в два раза больше, чем чёрных?

**Ответ:** 48 фишек.

**Решение.**

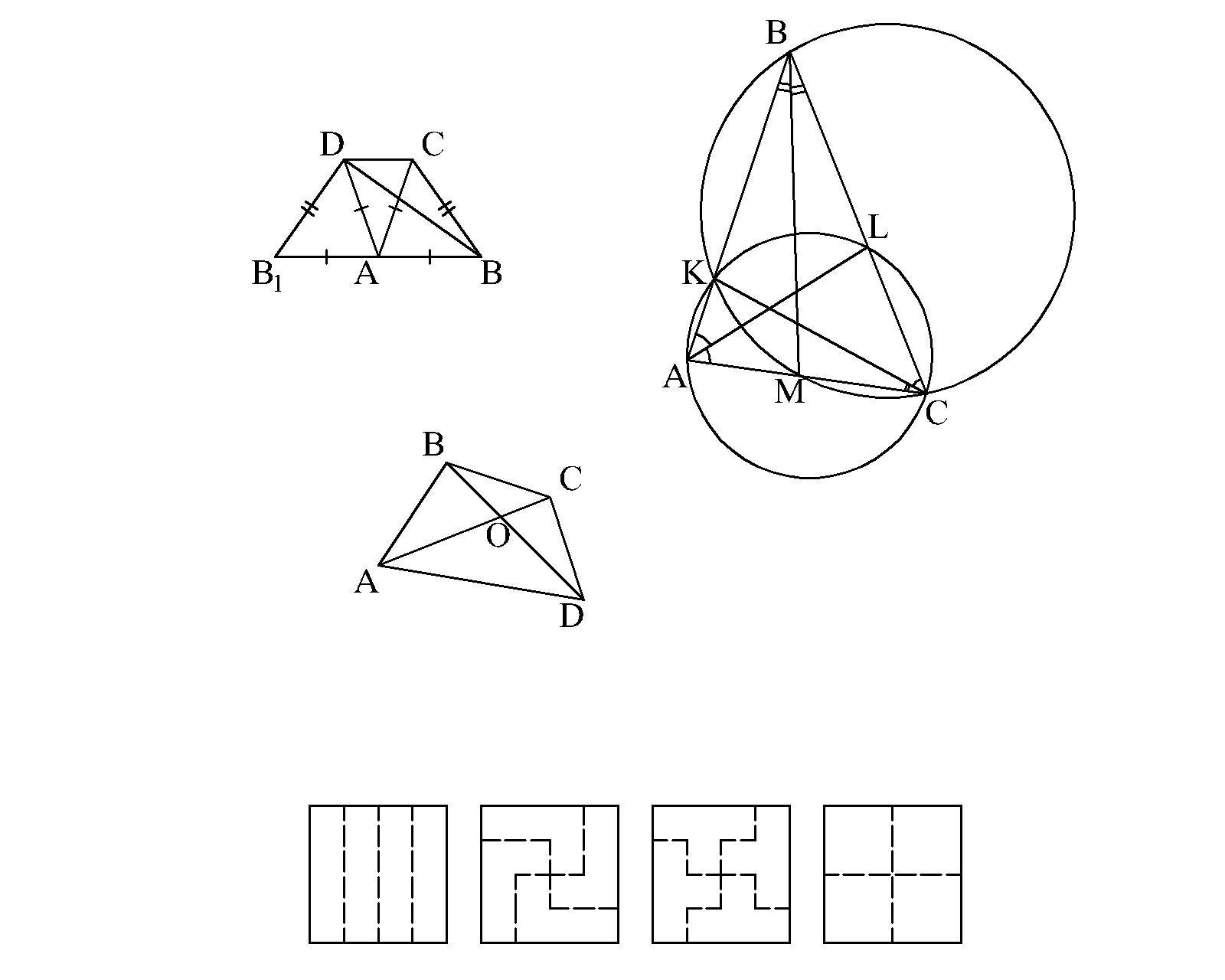
*Оценка*. Число фишек на каждой вертикали кратно 3, значит, их не больше 6, а на всей доске – не более 48.

*Пример*: 32 белые фишки ставим на белые поля, а 16 чёрных - вдоль главной "чёрной" диагонали и вдоль двух параллельных диагоналей "длины" 4.

**2-5**. В трапеции основание , диагональ и сторона равны между собой и имеют длину 5. Длина стороны равна 6. Найдите длину диагонали .

**Ответ:** .

**Решение.**

Продолжим отрезок за точку на расстояние равное . Полученную точку соединим с точкой . Рассмотрим треугольник . Поскольку , то . Так как , то треугольники и равны, откуда . Тогда из прямоугольного треугольника получим .

**2-6**. Имеется 21 ненулевое число. Для каждых двух из них вычислены их сумма и произведение. Оказалось, что половина всех сумм положительна и половина – отрицательна. Каково наибольшее возможное количество положительных произведений?

**Ответ:** 120.

**Решение.**

Всего сумм 210, то есть по 105 сумм каждого знака. Пусть было х чисел одного знака и y – другого. Нам надо минимизировать количество xy отрицательных произведений. При фиксированной сумме произведение чисел тем меньше, чем дальше они друг от друга. Ни одно из чисел х и y не может быть больше 15 (иначе количество сумм одного знака будет больше 15·14:2 = 105), поэтому наилучший результат будет при х = 15, y = 6 (или наоборот). При этом количество отрицательных произведений равно 90. Нужное количество положительных сумм достигается, например, если пятнадцать чисел равны 1, а шесть равны –2.

**3-3**. Решите уравнение: .

**Ответ:** 4.

**Решение.**

Действительно, – корень уравнения, что проверяется подстановкой. Других решений нет, так как в левой части уравнения записана возрастающая функция.

**3-4**. Найдите наименьший радиус круга, из которого можно вырезать треугольник, длины сторон которого 4 см, 5 см и 7 см.

**Ответ:** 3,5 см.

**Решение.**

Очевидно, что диаметр искомого круга не меньше, чем наибольшая сторона, то есть, не меньше чем 7 см. Так как , то данный треугольник – тупоугольный. Следовательно, вершина тупого угла будет лежать внутри круга, диаметром которого является большая сторона треугольника.

Заметим, что диаметр круга, описанного около треугольника, больше, чем 7 см, так как в таком круге большая сторона данного треугольника является хордой, отличной от диаметра.

**3-5**. Каким наибольшим количеством нулей может оканчиваться десятичная запись числа , где – натуральное число?

**Ответ:** двумя нулями.

**Решение.**

При при Докажем, что число x не может оканчиваться тремя нулями. Для этого достаточно показать, что это число не кратно 8. Если , то каждое из чисел и кратно 8, число дает при делении на 8 остаток 1, а число при делении на 8 дает остаток 3 (при нечетных n), либо остаток 1 (при четных n). Следовательно, число x при делении на 8 имеет остаток 4 или остаток 2, то есть тремя нулями оканчиваться не может.

**3-6**. *N* друзей одновременно узнали *N* новостей, причём каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. Каждый разговор длится 1 час. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество часов необходимо, чтобы все узнали все новости, если а)  *N* = 64, б)  *N* = 55.

**Ответ:** а) 6 часов, б) 7 часов.

**Решение.**

а) Новость, известная одному из друзей, после 1-го часа станет известна не более чем двум (включая первого), после второго часа – не более чем четырём, ..., после 5-го часа – не более чем 32. Итак, потребуется не менее 6 часов.

Покажем, что 6 часов достаточно. Переговоры можно вести по следующей схеме. Занумеруем участников шестизначными двоичными числами. В *k*-й час беседуют люди, номера которых отличаются *только* в *k*-м разряде (например в 3-й час *abc*0*de* беседует с *abc*1*de*). При этом каждый час количество новостей, известных каждому, удваивается. (Например, после 2-го часа каждый знает четыре новости, известные четырём участникам с номерами, отличающимися от его номера в двух первых разрядах.)

б) В первый час один из участников ни с кем не беседует. Как видно из а), остальным, чтобы узнать его новость, потребуется еще не меньше 6 часов.  
Разделим участников на две группы: 32 и 23 человека. В 1-й час все члены второй группы беседуют с членами первой. За следующие 5 часов члены первой группы обмениваются новостями (по схеме из а) или из в); в результате каждый знает *все* новости). В последний час они сообщают всю информацию членам второй группы.

**4-4**. Найдите все простые числа x, y и z, для которых выполняется равенство: .

**Ответ:** (2;2;5).

**Решение.**

Для любых простых чисел x и y выполняется неравенство , так как 2 – наименьшее простое число. Следовательно, , то есть, z является нечетным простым числом, значит, - четное, то есть, . Если , то , поэтому, (2;2;5) – решение данного уравнения. Если , то y – нечетное простое число, тогда сумму можно разложить на множители, отличные от единицы и самого числа: , следовательно, она не будет простым числом.

**4-5**. Решите неравенство: .

**Ответ:** все действительные числа, кроме числа -1.

**Решение.**

Так как , то, используя верное неравенство , получим, что данное неравенство выполняется при всех значениях x, при которых входящие в него выражения имеют смысл. То есть, множеством решений этого неравенства являются все значения x кроме x=-1.

**4-6**. На новом сайте зарегистрировалось 2000 человек. Каждый пригласил к себе в друзья по 1000 человек. Два человека *объявляются* друзьями тогда и только тогда, когда каждый из них пригласил другого в друзья. Какое наименьшее количество пар друзей могло образоваться?

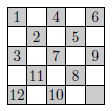
**Ответ:** 1000 пар.

**Решение.**

*Оценка*. Всего было отправлено 2000000 приглашений, а пар на сайте 1000·1999 = 1999000. Приглашений на 1000 больше, чем пар, поэтому внутри хотя бы 1000 пар было отправлено два приглашения. Значит, образовалось хотя бы 1000 пар.

*Пример*: расставим всех в вершинах правильного 2000-угольника, и пусть каждый пригласит 1000 следующих за ним по часовой стрелке. Тогда друзьями окажутся только те, кто расположен в противоположных вершинах.

**5-5**. Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки – чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура – мини-слон, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини-слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини-слон?

**Ответ:** 12 клеток.

**Решение.**

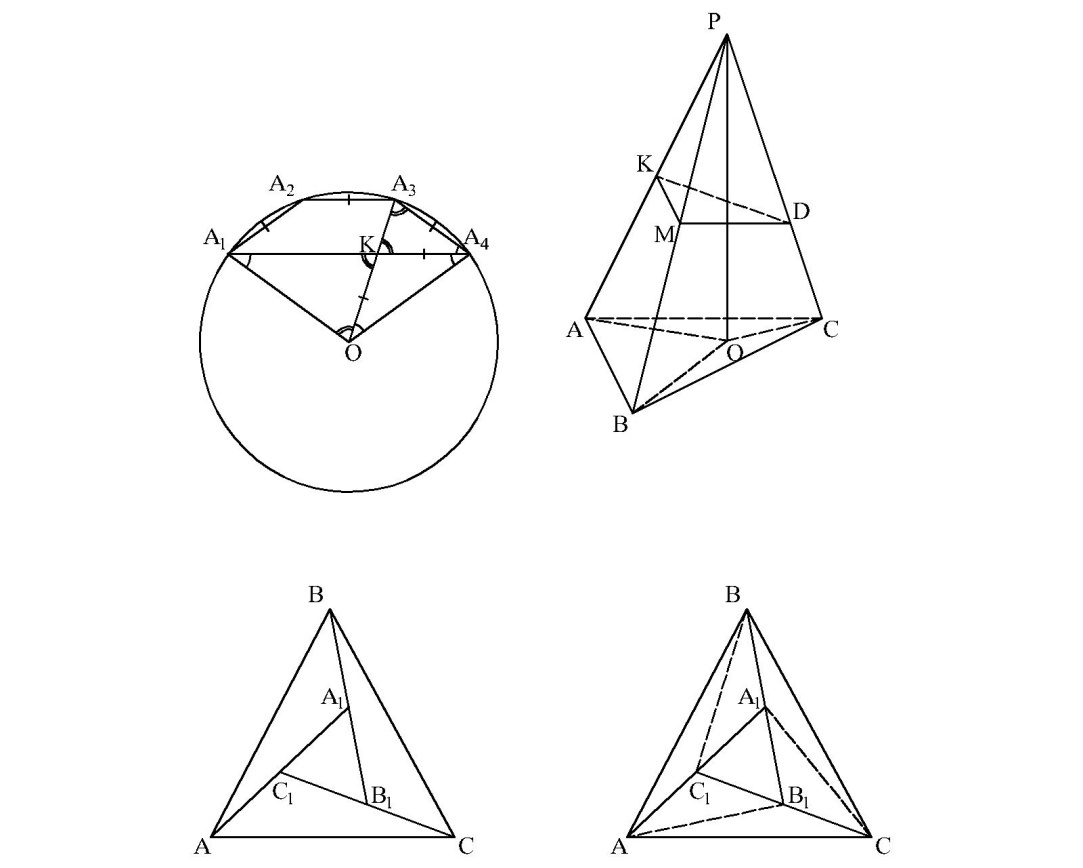
Приведём вначале пример маршрута мини-слона, который обеспечит посещение им двенадцати клеток (см. рис., числа от 1 до 12 показывают порядок обхода клеток).

Докажем, что все чёрные клетки мини-слон обойти не сможет. Рассмотрим четыре угловые клетки. Выйти из такой клетки мини-слон может либо в соседнюю клетку, либо в центральную. В соседнюю клетку из угловой он может пойти только первым ходом. Действительно, попасть в угловую клетку можно либо из соседней, либо из центральной, перепрыгнув через уже пройденную соседнюю. В обоих случаях, снова пойти в соседнюю клетку мини-слон не сможет. В центральную клетку из угловой мини-слон может пойти также не более одного раза. Таким образом, мини-слон покинет угловые клетки не более двух раз, значит, он посетит не более трёх угловых клеток.

**5-6**. Десять точек делят окружность единичного радиуса на 10 равных дуг. Найдите разность длин отрезков и .

**Ответ:** 1.

**Решение.**

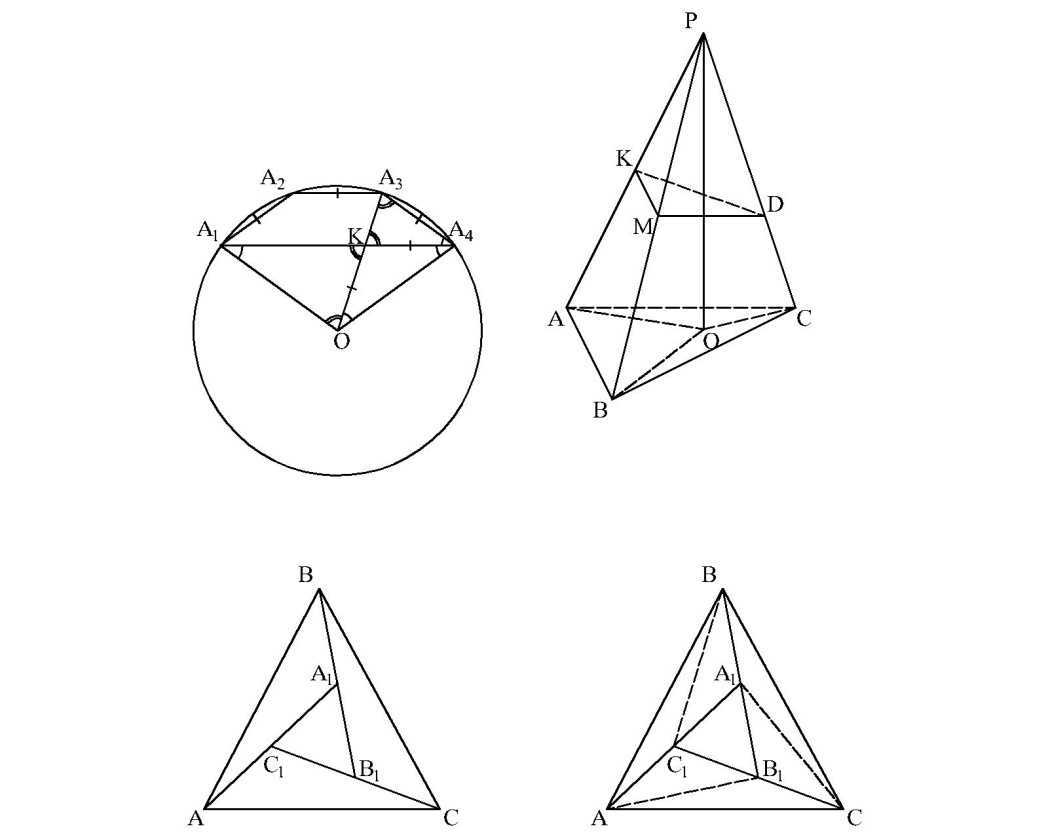
Последовательно соединив данные точки отрезками, получим правильный десятиугольник, вписанный в окружность. Так как равные дуги окружности стягиваются равными хордами, то – равнобокая трапеция. Внутренний угол правильного десятиугольника имеет величину 144°, поэтому углы этой трапеции – 144° и 36°.

Соединим точки с точкой O – центром окружности. K – точка пресечения отрезков и . Каждая из данных равных дуг имеет величину 36°, поэтому, . Следовательно, треугольники и – равнобедренные, значит . Так как , то треугольник – также равнобедренный, поэтому .

**6-6**. В правильной треугольной пирамиде на боковых ребрах выбраны точки: – середина , – середина , , . Через точки , и проведена плоскость, которая делит полную поверхность пирамиды на части, отношение площадей которых равно составному натуральному числу. Какому?

**Ответ:** 4.

**Решение.**

Рассмотрим данную пирамиду. Площадь той части поверхности, которой принадлежит основание пирамиды, очевидно, больше. По условию, , где m – составное натуральное число. Пусть площадь каждой боковой грани S, а величина двугранного угла между боковой гранью и основанием равна α. Тогда , . Проведем высоту пирамиды и соединим точку O с вершинами треугольника . По теореме о площади проекции многоугольника на плоскость получим: , значит, . Таким образом, заданное отношение площадей имеет вид:

*Так как – острый угол, то , поэтому, множеством значений заданного отношения площадей является интервал , на котором есть всего одно составное натуральное число, а именно, число 4.*