**5 класс**

**1.** Валя решила пример на черновике, а затем переписала решение в тетрадь, но забыла поставить скобки. Вот, что у неё получилось:
**5 · 6 + 10 : 2 - 3 = 37**. Расставьте забытые Валей скобки.

**Решение: 5 · (6 + 10 ): 2 - 3 = 37**

**2.**  Разрежьте фигуру (см. рис.) на **5** частей одинаковой формы и одинакового размера так, чтобы в каждую часть попало ровно по одному серому квадратику.

Решение: 

**3.** На батоне колбасы нарисованы тонкие поперечные кольца. Если разрезать по красным кольцам, получится 5 кусков, если по желтым — 7 кусков, а если по зеленым — 11 кусков. Сколько кусков колбасы получится, если разрезать по кольцам всех трёх цветов?

Решение: Заметим, что количество частей всегда на 1 больше количества разрезов. Значит, красных колец 4 , жёлтых — 6 , а зелёных — 10 . Таким образом, всего разрезов 4+6+10=20 , а частей 21.

**Ответ:** 21 кусок

**4.** В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про своё золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:
А: Всё моё золото я украл у Дракона.
Б: Ты лжешь.
Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

**Решение:** Предположим, что А эльф. Тогда он сказал правду, а Б солгал. Но ни гномы, ни эльфы не лгут, говоря про эльфов. Значит, А гном. Говоря про золото, он солгал. Поэтому Б сказал про А правду. Это мог сделать только гном.

**Ответ:** Оба гномы.

**5.** За круглым столом сидят 2425 представителей четырёх племён: люди, гномы, эльфы и гоблины. Люди никогда не сидят рядом с гоблинами, а эльфы - рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного племени сидят рядом.

**Решение:** Предположим, что это не так, то есть рядом сидят только представители разных племён. Наденем на людей и гоблинов красные шапки, а на эльфов и гномов - синие. Из условия задачи и нашего предположения следует, что цвета шапок чередуются по кругу. Но из-за нечётности их количества это невозможно. Мы пришли к противоречию!

**6 класс**

**1.** В примере на сложение двух чисел первое слагаемое меньше суммы на 2000, а сумма больше второго слагаемого на 24. Восстановите пример.

**Ответ:** 24+2000=2024

**2.** На доске записаны 2024 натуральных числа. Докажите что среди них после вычёркивания одного из чисел всегда можно найти число, произведение которого на сумму оставшихся чисел будет чётным числом.

**Решение.** Если после вычёркивания одного из чисел оставшиеся будут нечётными, то произведение нечётного на сумму чётного числа нечётных чисел будет чётным. Если же хотя бы одно число среди оставшихся чётное, то произведение этого числа на сумму оставшихся будет чётным.

**3.** Три лягушки на болоте прыгнули по очереди. Каждая приземлялась точно в середину отрезка между двумя другими. Длина прыжка второй лягушки 60 см. Найдите длину прыжка третьей лягушки.

**Решение:** Независимо от того, как сидели лягушки вначале, после первого прыжка они будут на одной прямой, причём первая (А) посередине.



Теперь прыгает вторая лягушка (Б). Она пролетает расстояние до А и ещё половину этого расстояния, что по условию составляет 60 см. Значит, между нею и А (равно как и между А и В) было 40 см.



Итак, теперь между А и В 40 см, ровно посередине между ними находится Б, а очередь прыгать за В. Она пролетит 20 см и ещё половину этого расстояния, то есть всего 30 см.



**Ответ:**30 см.

**4.** Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но все же больше одной конфеты.
Сколько всего конфет было съедено?

**Решение:**  Выберем из детей одного – к примеру, Петю. Если из всех остальных конфет забрать 7, останется столько же, сколько у Пети. Поэтому удвоенное число конфет Пети равно общему числу конфет без семи. То же можно сказать про любого из детей, значит, у всех детей конфет поровну – скажем, по одной кучке.
  Ясно, что каждый съел на целое число кучек меньше остальных вместе. Поэтому 7 делится на размер кучки. Значит (так как по условию каждый съел больше одной конфеты), в кучках по 7 конфет, то есть каждый съел на кучку меньше, чем все остальные. Петя съел одну кучку, следовательно, остальные – две. Значит, всего кучек три, а конфет – 21.

**Ответ:** 21 конфета.

 **5.** В хороводе по кругу стоят **15** детей. Справа от каждой девочки стоит мальчик. У половины мальчиков правый сосед тоже мальчик, а у каждого из остальных мальчиков правый сосед - девочка. Сколько мальчиков и сколько девочек в хороводе?

**Решение:** Так как у каждой девочки правый сосед - мальчик, то в хороводе должны быть пары Д - М (слева направо: девочка - мальчик). Хоровод не может состоять только из таких пар, потому что у половины мальчиков соседи справа - мальчики. Значит, в хороводе должны быть "тройки" Д - М - М. У другой половины мальчиков правые соседи - девочки, значит, должно быть: Д - М - М - Д - ... . Таким образом, хоровод состоит из пяти "троек" вида Д - М - М, то есть, мальчиков в два раза больше, чем девочек.

**Ответ**: девочек - 5; мальчиков - 10. Ответ можно также дать в виде рисунка

**7 класс**

**1.** На доске написаны четыре трёхзначных числа, в сумме дающие 2309. Для записи их всех были использованы только две различные цифры. Приведите пример таких чисел.

**Ответ:** 929+922+229+229=2309

**2.** Можно ли представить 1 в виде суммы 2024 дробей, числители которых равны 1, а знаменатели - нечётные числа?

**Решение:** Нет, так как если вычислять эту сумму, приводя к общему знаменателю, то знаменатель такой дроби будет нечётным, а числитель чётным (как сумма четного числа нечетных слагаемых). Частное чётного и нечётного числа есть чётное, а значит 1 получиться не может.

**3.** В маленьком городе только одна трамвайная линия. Она кольцевая, и трамваи ходят по ней в обоих направлениях. На кольце есть остановки Цирк, Парк и Зоопарк. От Парка до Зоопарка путь на трамвае через Цирк втрое длиннее, чем не через Цирк. От Цирка до Зоопарка путь через Парк вдвое короче, чем не через Парк. Какой путь от Парка до Цирка – через Зоопарк или не через Зоопарк – короче и во сколько раз?

**Решение:** Сядем в трамвай на остановке Зоопарк и поедем через Цирк к Парку, а потом, не покидая трамвай, вернёмся к Зоопарку. Вторая часть пути втрое короче первой, то есть первая занимает три четверти полного круга, а вторая – четверть. Отметим на схеме Зоопарк и Парк и где-то на более длинной дуге между ними отметим Цирк (см. рис.). Теперь на том же трамвае поедем из Цирка к Зоопарку (при этом проезжая Парк, как видно на схеме).



Доехав до Зоопарка, на том же трамвае вернёмся к Цирку, описав круг. Первая часть пути вдвое короче второй, то есть занимает треть круга. Это значит, что путь (всё на том же трамвае) от Цирка к Парку не пройдёт через Зоопарк и составит  1/3 – 1/4 = 1/12  часть полного круга. Путь же через Зоопарк равен  1 – 1/12 = 11/12  круга, что в 11 раз длиннее.
**Ответ:** Путь не через Зоопарк короче в 11 раз.

**4.** Из прямоугольника 3 × 6 вырезали одну клетку (см. рис.). «Пришейте» эту клетку в **другом** месте так, чтобы получилась фигура, которую можно разрезать на две одинаковых. Перечислите три возможных варианта такого разрезания.



Ответ.



**5.** Из трех мальчиков, которых зовут Антон, Ваня и Саша, только один всегда говорит правду. Антон сказал: "Ваня не всегда говорит правду", Ваня сказал: "Я не всегда говорю правду", а Саша сказал: "Антон не всегда говорит правду". Кто же из них всегда говорит правду, если известно, что по крайней мере один из них солгал?

1) Легко видеть, что Ваня говорит правду (если предположить, что он лжет и высказывание "Я не всегда говорю правду" - не является правдой, то правдой будет: "Я всегда говорю правду", то есть, получится противоречие).

2) Так как смысл высказывания Антона такой же, то Антон тоже говорит правду.

3) По условию, один из мальчиков солгал, значит, это - Саша.

4) Саша сказал: "Антон не всегда говорит правду" - и при этом солгал, значит, Антон всегда говорит правду.

Проанализируйте высказывания, определите ложные и истинные, и ответьте на вопрос задачи.

**Решение**:

Высказывание 1 является истинным, то есть Ваня сказал правду. Значит Ваня и Антон, говорящие по смыслу одно и тоже, либо одновременно лгут, либо одновременно говорят правду. Таким образом, высказывание 2 тоже истинное, Антон сказал правду. По условию кто-то должен солгать, и сделать это может только Саша, высказывание 3 истинное, а Сашина фраза ложная – Антон всегда говорит правду.

**Ответ**: Всегда говорит правду Антон.

**8 класс**

**1.** Замените в выражении ABC = DEF буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным, использовав каждую цифру от 1 до 6 ровно один раз. (Пояснение: ABC — двузначное число из цифр A и B, возведенное в степень C. Достаточно привести один способ замены.)



**2.** Разложить на множители выражение: х3 + у3 +z3 – 3xyz

**Ответ: (х+у+z)(x2+y2+z2-xy-xz-yz)**

**Решение:**  *a*3 + *b*3 + *c*3 – 3*abc* = (*a + b*)3 + *c*3 – 3*ab*(*a + b*) – 3*abc* = (*a + b + с*)((*a + b*)2 – (*a + b*)*c + c*2) – 3*ab*(*a + b + с*) =
      = (*a + b + с*)(*a*2 + *b*2 + *c*2 – *ab – aс – bс*).

**3.** Докажите, что если ***a***, ***b***, ***c*** - нечётные числа, то хотя бы одно из чисел ***ab*- 1**, ***bc* - 1** или ***ac* - 1** делится на **4**.

**Решение:** Остаток от деления нечетного числа на 4 может быть либо 3, либо 1. Если среди чисел *a*, *b*, *c* есть хотя бы два числа, остатки от деления которых на 4 равны 1, то их произведение при делении на 4 также даёт остаток 1. Следовательно, разность этого произведения и единицы делится на 4, ч. т. д.

В противном случае, среди данных найдутся хотя бы два числа, остатки от деления которых на 4 равны 3. Так как (4*m* + 3)\*(4*n*+ 3) - 1 = 16*mn* + 12*m*+ 12*n* + 8 = 4(4*mn* + 3*m* + 3*n* + 2), то разность произведения этих чисел и единицы делится на 4, ч. т. д..

 **4.** Дана трапеция ***АВСD*** (***ВС*** || ***DA***). Через середину ***М*** боковой стороны ***АВ*** проведена прямая, параллельная основаниям. Биссектриса угла ***АВС*** пересекает эту прямую в точке ***О***. Докажите, что ***АО*** - биссектриса угла ***BАD***.

**Решение:** Пусть *K* - точка пересечения *BK* и *AD* (см. рис.).

Так как /*AKB* = /*CBK* = /ABK, то *ABK* - равнобедренный (*AB* = *AK*). *O* - середина *BK* (по теореме Фалеса), значит, *АО* - медиана *ABK*, которая одновременно является и биссектрисой. Следовательно, *АО* - биссектриса угла *BАD*, ч. т. д. Суть приведенного решения не изменится, если *AD* будет меньшим основанием трапеции. Также возможны схожие рассуждения, связанные с доказательством равнобедренности треугольников *BМО* и *АМО*.

**5.** На острове живут красные, синие и зелёные хамелеоны. 35 хамелеонов встали в круг. Через минуту все они одновременно поменяли цвет, каждый на цвет одного из своих соседей. Ещё через минуту снова все одновременно поменяли цвета на цвет одного из своих соседей. Могло ли оказаться, что каждый хамелеон побывал и красным, и синим, и зелёным?

**Ответ:** Не могло

**Решение:** Предположим, такое случилось. В первый раз никакой хамелеон не мог отдать свой цвет обоим соседям — иначе он будет стоять между двумя хамелеонами этого же цвета и во второй раз будет вынужден окраситься в этот цвет вновь. Но никакой хамелеон не мог отдать свой цвет обоим соседям и во второй раз: если так произошло, то этот хамелеон минуту назад получил этот цвет от одного из соседей, значит, один из его соседей принимал этот цвет два раза — в начале и в конце. Поэтому каждый хамелеон каждый раз отдаёт свой цвет не более чем одному соседу, то есть количество хамелеонов каждого цвета не увеличивается. Но хамелеонов 35, а цветов 3, значит, изначально хамелеонов какого-то цвета не больше 11 (иначе суммарно хамелеонов хотя бы 12х 3=36). Тогда хамелеонов этого цвета за всё время было не больше 11х 3=33, и какой-то из хамелеонов точно в этот цвет не окрашивался.