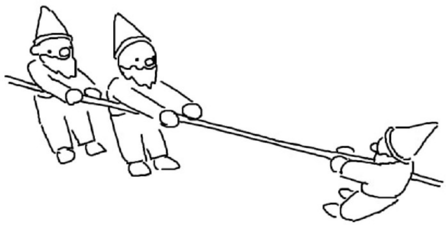
БОЛЬШАЯ ЛИГА

1. Гномики

1. Гномики хотят порвать канат, перетягивая его с двух сторон. Гномик-мудрец сказал, что канат порвется, если сила натяжения достигнет 1 Н. Гномики измерили свои силы и оказалось, что у каждого она равна $\frac{1}{8}\,H$. Какое количество гномиков понадобится, чтобы канат всё же порвался?

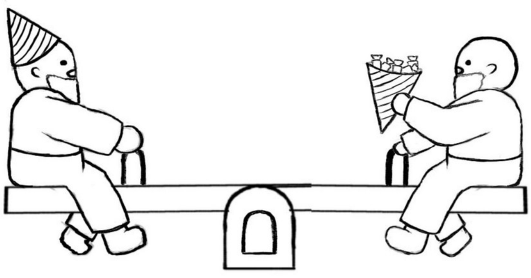


Решение:

Рассмотрим, для начала, другую ситуацию: пусть канат привязан к столбу. Тогда для разрыва потребуются 8 гномов, а сила реакции опоры, возникшая в столбе по третьему закону Ньютона, будет равна 1 Н. В случае, если второй конец каната тянут другие гномы, то они должны приложить такую же по модулю силу, противоположную по направлению (эквивалент силы реакции опоры столба). Следовательно, канат порвут 16 гномиков.

Ответ: **16 гномов.**

2. Два гномика массой M=800 грамм каждый качались на невесомых качелях длиной L=1 метр, находясь равноудаленно от центра качели. Один из гномиков замечтался, взял кулёк, лежащий рядом с качелями, и съел сотню конфет, каждая массой m=2 грамма. На сколько сантиметров должен подвинуться наевшийся конфет гномик, что бы качели вернулись в равновесие? Ответ дайте в сантиметрах.



Решение: Изначально массы гномиков и их расстояния до центра равны, тогда первоначальные моменты сил:

M*L/2=M*L/2

После поедания конфет масса наевшегося гномика изменилась:

M1 = M+100*m = 1000 грамм

Так как масса гномика увеличилась, расстояние от него до точки опоры должно уменьшиться. Зная что качели пришли в равновесие, распишем моменты сил:

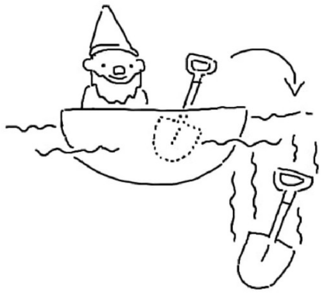
M*L/2=M1*(L/2-x)

x = (L/2*(M1-M))/M1

x = 10 см

Ответ: **10 см (0,1 м).**

3. Гномик на лодке перевозил лопату по озеру. В какой-то момент он подумал: «Зачем мне лопата?!» и выбросил её в озеро, после чего она пошла ко дну. Как при этом изменился уровень жидкости в озере?



Решение: 1. Когда гномик еще не выкинул свою лопату:

На лодку вместе с гномиком и лопатой действуют сила тяжести и сила Архимеда, лодка при этом находится в равновесии: $F_A = F_т$

$p_ж gV_1 = F_{т1} + F_{т2}$, где $F_{т1}$ и $F_{т2}$ - это силы тяжести лодки с гномом и лопаты соответственно

$p_ж gV_1 = F_{т1} + m_л g$, где $m_л$ - масса лопаты

$V_1 = (F_{т1}/p_ж g) + (m_л/p_ж)$ - объем воды, вытесненный лодкой с лопатой и гномом.

2. Когда гномик уже выкинул свою лопату:

В этом случае аналогичным способом составляем уравнение равновесия лодки с гномом, но уже без лопаты

$F_A = F_{т1}$

$p_ж gV_в = F_{т1}$ => $V_в = F_{т1}/p_ж g$ — объем воды, вытесненной лодкой с гномом.

Но помимо этого жидкость вытесняется объемом лопаты $V_л$. Итого в этом случае объем V_2 вытесненной лодкой, гномом и лопатой жидкости равен:

$V_2 = V_в + V_л = (F_{т1}/p_ж g) + (m_л/p_л)$

Так как $p_л > p_ж$ (это следует из того, что лопата утонула), то $V_1 > V_2$ => уровень воды до выброса лопаты был выше, чем после.

Ответ: уровень понизился.

4. Двум гномикам в лодке стало скучно (лопаты же уже нет) и они начали соревноваться в кидании конфет массой m = 10 грамм в колпак массой M = 20 грамм объемом V = 100 см^3 посреди озера. Проигрывает тот, после чьего хода колпак тонет. Сколько конфет смогут закинуть гномики? Плотность воды p = 1000 кг⁄м^3.

Решение:

Изначально на колпак действуют сила Архимеда и сила тяжести, причем сила Архимеда больше, так как колпак не тонет.

Найдем N - максимально возможное количество конфет при котором $F_A = F_т$:

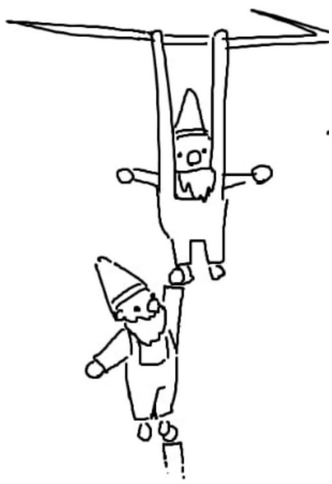
$\rho gV = (M+N*m)g$

Найдем отсюда N:

$N = (\rho gV - Mg)/mg = 8$ конфет

Ответ: 8 конфет.

5. Гномик зацепился подтяжками за ветку дерева и повис на высоте 1 м от уровня ветки. Общая высота дерева равна 10,9 м. Чтобы освободиться, гномику нужно подлететь до ветки, за которую он зацепился. Его друзья могут помочь и выкопать дерево, но лопата на дне озера. Решили прыгать, хватаясь за него: каждый прыжок растягивает подтяжки, и резко разом отпустить. Сколько друзей должны прыгнуть на висящего гномика, чтобы он освободился, если масса каждого гномика 500г?



Решение:

Для начала найдем коэффициент жесткости $kh=mg$, $k=mg/h=5$ Н/м

Для того, чтобы гномик смог долететь до уровня ветки, потенциальной энергии пружины должно хватить, чтобы подняться до уровня ветки

$(kx^2)/2=mgx$

$x(kx/2 - mg)= 0$

$x=0$, что не подходит, так как это означает, что гномик уже на высоте ветки,

$kx/2 = mg$

$x = 2mg/k = 2$ м

Найдем количество гномиков N , которое нужно для достижения удлинения x

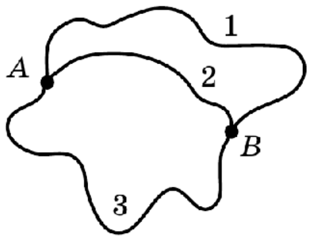
$Nmg=kx$

$N=Kx/mg = 2$ гнома

Так как один гном уже висит на подтяжках, то на помощь должен прийти 1 гном

Ответ: 1 гном.

2. Движение



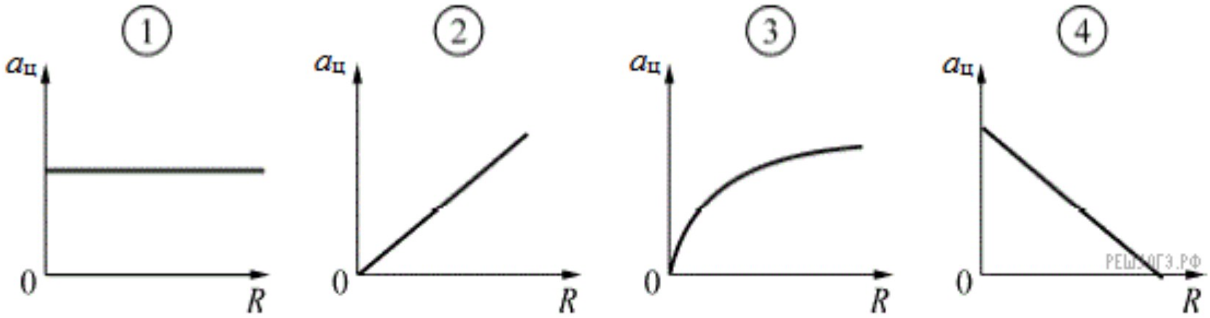
1. Тела переместились из точки А в точку В по траекториям, указанным на рисунке. Какое тело совершило минимальное перемещение?

Решение:

Перемещение — вектор, проведенный из начального положения тела в его конечное положение. В данном примере для всех трех тел перемещением будет вектор, соединяющий точки А и В.

Ответ: перемещение тел одинаковое.

2 Диск равномерно вращается вокруг оси, которая перпендикулярна плоскости диска и проходит через его центр. К плоскости диска прилипли мелкие песчинки. Четыре ученика нарисовали график зависимости центростремительного ускорения $a_ц$ песчинки от ее расстояния R до центра диска. Какой график является правильным?



Решение:

Центростремительное ускорение рассчитывается по формуле $a_ц = \frac{\upsilon^2}{R}$, где υ — скорость точки на диске, а R — расстояние от центра диска до той точки. Скорость точки вращающегося тела рассчитывается по формуле $\upsilon = \omega R$, следовательно, $a_ц = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R$. Зависимость центростремительного ускорения от радиуса — линейная, причем, если радиус равен нулю, то и центростремительное ускорения равно нулю. Следовательно, верный график указан под номером 2.

Ответ: 2.

3. При скорости ветра 20 м/с скорость капель дождя 40 м/с. Какой будет скорость капель при скорости ветра 5 м/с.

Решение:

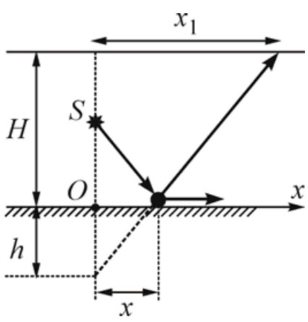
Скорость капель в безветренную погоду: $V_0 = \sqrt{40^2 - 20^2}$

Скорость капель при ветре 5 м/с : $V=\sqrt{V_0^2+5^2}=\sqrt{40^2-20^2+5^2}=35\ м/с$

Ответ: 35 м/с.

4. Под настольной лампой, находящейся на высоте h = 1 м над поверхностью стола, по столу проложены прямые рельсы (проходящие строго под лампой). По ним со скоростью V = 1 м/с катится маленькая тележка с лежащим на ней горизонтально зеркальцем. С какой скоростью u бежит светлое пятнышко по потолку? Высота потолка над поверхностью стола H = 2 м.

Решение:



Изобразим ход лучей на рисунке. Координата светлого пятна x_1 связана с координатой тележки x соотношением подобия $x_1 : x = (H+h) : h$. Принимая в качестве начала отсчета времени момент прохождения тележки под лампой, запишем зависимость координаты x тележки от времени t: в силу равномерности движения эта зависимость имеет вид $x = Vt$. Отсюда $x_1 = \dfrac{H+h}{h}Vt$. Следовательно, скорость пятна $u = \dfrac{x_1}{t} = \dfrac{H+h}{h}V = 3$ м/с.

Ответ: 3 м/с.

5. Поезд метро уезжает со станции с постоянным ускорением, при этом третий вагон проезжает мимо дежурной по станции, стоящей около кабины машиниста, за 7 секунд. За сколько времени проедет весь состав из шести вагонов?

Решение:

Пусть ускорение поезда a, длина каждого вагона ℓ. Время, за которое пройдет N вагонов поезда определим так:

$$a\frac{t_N^2}{2} = N\ell,\ t_N = \sqrt{\frac{2N\ell}{a}}.$$

Тогда время прохождения третьего вагона равно

$$t_3 = \sqrt{\frac{2\cdot 3\ell}{a}} - \sqrt{\frac{2\cdot 2\ell}{a}} = (\sqrt{6}-2)\sqrt{\frac{\ell}{a}}.$$

Время прохождения всего поезда

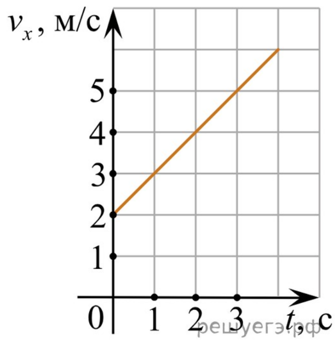
$$t_6 = \sqrt{\frac{2\cdot 6\ell}{a}} = 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{\ell}{a}} = \frac{2\sqrt{3}t_3}{\sqrt{6}-2} = 55\ \text{с}.$$

Примечание: за счет округления возможен ответ в пределах от 54 до 56 с.

Ответ: в пределах от 54 до 56 с.

3. Работа. Энергия. Тепло

1. Тело движется вдоль оси *OX* под действием силы $F = 2$ Н, направленной вдоль этой оси. На рисунке приведен график зависимости проекции скорости υ_X тела на эту ось от времени *t*. Какую мощность развивает эта сила в момент времени $t = 3$ с? (Ответ дайте в ваттах.)



Решение:

Из графика видно, что проекция скорости тела в момент времени t = 3 с равна V_x = 5м/с.

Мощность, развиваемая силой $\vec{F}$ над телом, двигающимся со скоростью V можно найти по формуле N=F*V

В данном случае, поскольку сила и скорость оказываются сонаправленными, мощность равна произведению модуля скорости на модуль силы:

$N = F\upsilon = 2$ Н $\cdot 5$ м/с $= 10$ Вт.

Ответ: 10 Вт.

2. Мальчик решил приготовить леденцы. Для этого он насыпает в ложку 6 г сахара и нагревает на электрической плите, пока сахар не расплавится. Сколько таких леденцов приготовил мальчик, если всего затратил 15 кДж. Температура на кухне 20 °С, температура плавления сахара 170 °С, удельная теплоемкость сахарного песка равна 1250 Дж*С/кг, удельная теплота плавления равна 56 кДж/кг.

Решение:

Найдем, сколько энергии требуется, чтобы из m= 6 грамм сахара получить леденец:

Qл = m*c*($t_{плав}$ - $t_{окр}$) + m*λ = 0,006*1250*(170-20) + 0,006*56000= 1461 Дж.

Дальше найдем количество леденцов N, на которые хватит энергии:

N=Q/Qл=15000/1461= 10,27, но леденцов не может быть дробное количество, т.к. это означает, что энергии не хватило на плавление следующего леденца => всего мальчик приготовил 10 леденцов

Ответ: 10 леденцов.

3. При подъеме груза электромотор в течение времени 0,5t развивал мощность 8N , а затем в течение времени 2t — мощность 3N . С какой

средней мощностью должен был работать мотор, чтобы за то же время поднять этот же груз?

Решение:

$$N_{ср} = \frac{0{,}5t \cdot 8N + 2t \cdot 3N}{0{,}5t + 2t} = \frac{10\,Nt}{2{,}5\,t} = 4\,N$$

Ответ: 4N.

4. Свинцовая пуля пробивает деревянную стену, причем скорость в момент удара о стену была 400 м/с, а после прохождения стены - 300 м/с. Температура пули в момент удара T_0 = 323 К. Какая часть пули расплавилась, если удельная теплота плавления свинца   = 2,5*10^4 Дж/К, температура плавления Т = 600 К, удельная теплоемкость с = 125 Дж/кг*К. Считать, что все выделяющееся тепло получает пуля.

Решение:

Тепло Q, выделившееся при ударе, равно уменьшению кинетической энергии пули. Это тепло пошло на нагревание пули до температуры плавления и на то, чтобы расплавить часть пули:

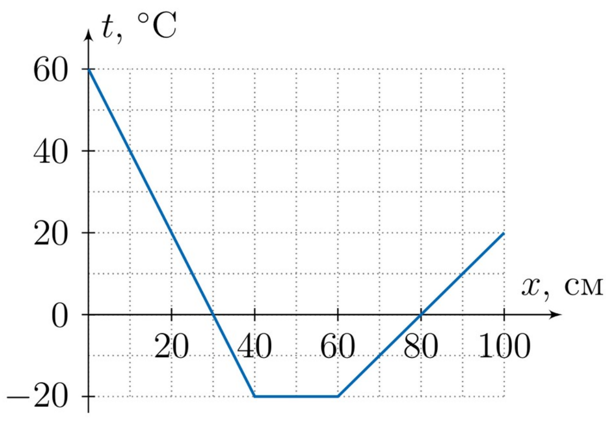
$$Q = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2} = mc(T - T_0) + \lambda m_1,$$

где m – масса пули, m_1 – масса расплавившегося свинца. Отсюда

$$\frac{m_1}{m} = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - c(T - T_0)\right] = 0{,}015.$$

Ответ: 0,015 (1,5%).

5. На рисунке показано распределение температуры вдоль тонкого однородного стержня длиной 100 см. Какое количество теплоты потребуется для того чтобы нагреть его до температуры 50 ˚С? Стержень медный, площадь поперечного сечения 1 $см^2$. Тепловыми потерями пренебречь.



Решение:

Рассмотрим маленький произвольный отрезок стержня длиной Δx, тогда его массу можно определить следующим образом:

Δm = ΔV · ρ = Δx · S · ρ, где ΔV — объем этого малого цилиндра длиной Δx.

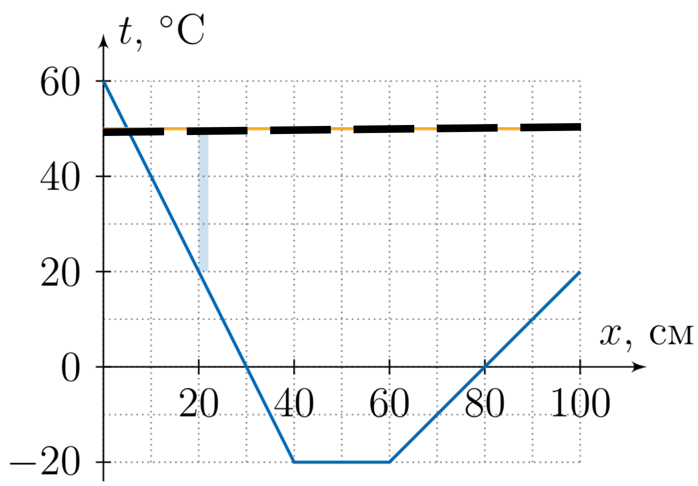
Чтобы понять сколько нужно тепла, чтобы нагреть такой маленький отрезок стержня до конечной температуры, нужно умножить Δm на удельную теплоемкость меди и разницу температур, которая соответствует именно этому отрезку: ΔQ = Δm · c · (t − t_0), где t_0 — начальная температура именно этого отрезка, а t = 50 °C — конечная температура стержня. Подставим ранее полученное:

$\Delta Q = \Delta x \cdot S \cdot \rho \cdot c \cdot (t - t_0)$.

Заметим, что всем малым отрезкам свойственнен общий множитель $S\rho c$, а значит для полного количества теплоты можно записать следующее выражение:

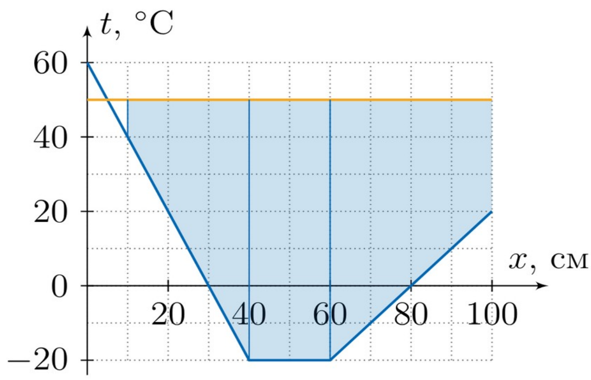
$Q = S\rho c\, [\Delta x_1 \cdot (t - t_{01}) + \Delta x_2 \cdot (t - t_{02}) + \ldots + \Delta x_N \cdot (t - t_{0N})]$.

Произведение $\Delta x \cdot (t - t_0)$ имеет графический смысл как площадь прямоугольника на графике (пунктирная линия), предложенного в условии задачи:



Малая порция количества теплоты может оказаться и отрицательной в том случае, когда начальная температура участка стержня выше, чем конечная температура (участок от 0 до 5 см).

Для удобства можно высвобожденное тепло с этого участка «передать» такому же по длине соседнему. Значит внешнее тепло пойдет на нагрев участка стержня от 10 см до 100 см. Посмотрим как будет выглядеть суммарное тепло, которое стержень получит извне:



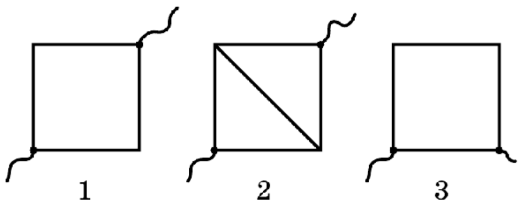
Найдя площадь выделенной фигуры, умножим ее на $S\rho c$ и получим искомое значение Q. Для удобства фигура разбита на две трапеции и прямоугольник.

$Q = 1\ \text{см}^2 \cdot 8{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{кг/см}^3 \cdot 400\ \text{Дж/(кг·°C)} \cdot [1/2(10 + 70) \cdot 30 + 70 \cdot 20 + 1/2(30 + 70) \cdot 40]\ \text{°C} \cdot \text{см} = 16\,376\ \text{Дж}$

Ответ: **16 376 Дж.**

4. Электричество

1. Три проволочных квадрата включены в цепь так, как показано на рисунке. Квадраты одинаковые, но один из них с перемычкой. В каком из вариантов сопротивление квадрата будет минимальным?

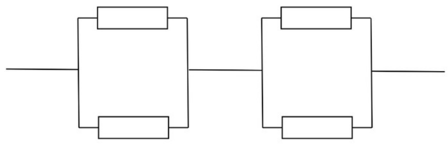


Решение:

Пусть сопротивление одной стороны квадрата равно R.

Вариант 1: общее сопротивление $\frac{1}{R_0}=\frac{1}{2R}+\frac{1}{2R}$; R_0=R

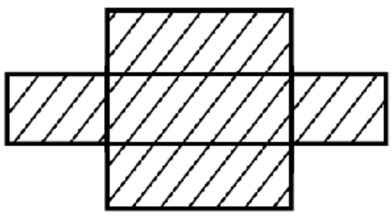
Вариант 2: из-за симметричности цепи по перемычке ток не идет, поэтому можем точки соединения с перемычкой соединить между собой. Построим эквивалентную схему, общее сопротивление которой R_0=R.



Вариант 3: общее сопротивление $\frac{1}{R_0}=\frac{1}{3R}+\frac{1}{R}$; R_0= 0,75 R

Ответ: 3 вариант.

2. Алюминиевая пластина составлена из пяти одинаковых частей так, как изображено на рисунке. Общее сопротивление пластины равно 7 Ом. Каково сопротивление одной части?



Решение:

Пусть искомое сопротивление одной части R. В центре части составляют параллельное соединение. Следовательно сопротивление центра будет $\frac{R}{3}$. Тогда общее сопротивление представленной пластины будет $R+\frac{R}{3}+R=\frac{7R}{3}$

Подставив численное значение 7 Ом, получим R= 3 Ом

Ответ: 3 Ом.

3. Трамвай массой m=22,5 т движется со скоростью v=36 км/ч по горизонтальному пути. Коэффициент трения μ = 0,01, напряжение в линии U = 500 В, общий КПД двигателя и передачи η = 75%. Определить силу тока в моторе.

Решение: При движении по горизонтальному пути мощность расходуется на преодоление силы трения, поэтому можем записать:

$$P = F_{тр}v = \mu\, m\, g\, v\,.$$

$$\eta = \frac{P_{пол}}{P_{затр}}\,, \quad P_{затр} = I \cdot U\,, \text{ тогда} \quad P_{пол} = \eta \cdot IU\,.$$

Из первого и последнего выражений получим: $\mu\, m\, g\, v = \eta \cdot IU\,.$

$$I = \frac{\mu\, m\, g\, v}{\eta\, U} = 60\,A\,.$$

Ответ: 60 А.

4. Трубка заполнена ртутью. Во сколько раз изменится сопротивление этой трубки, если её растянутой в 1,5 раза?

Решение:

При растяжении трубки в 1,5 раза, объем трубки с ртутью должен оставаться постоянным: $V_1 = V_2,$ $l_1 S_1 = l_2 S_2.$

Таким образом, можно выразить площадь трубки до растяжения: $S_1 = \frac{l_2 S_2}{l_1}.$ $S_1 = 1,5 S_2.$

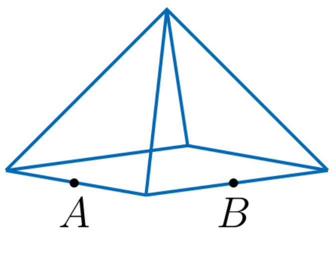
Теперь необходимо записать сопротивление двух трубок:

$R_1 = \rho\frac{l_1}{S_1},$ $R_2 = \rho\frac{l_2}{S_2}.$

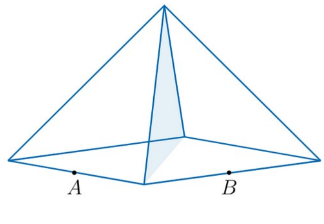
Найдем отношение сопротивлений: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2}.$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1,5 \cdot 1,5 \cdot S_2}{S_2} = 2,25 \text{ раза.}$$

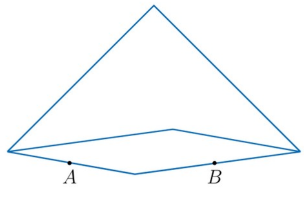
Ответ: 2,25 раза.



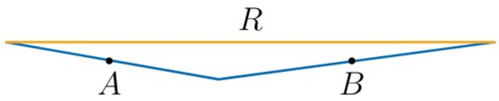
5. Определите сопротивление, измеренное между серединами A и B двух соседних ребер основания правильной четырехугольной пирамиды из проволоки, все ребра которой имеют одинаковые сопротивления R.



Решение: Отметим плоскость, перпендикулярную линии, соединяющей точки A и B. По ребрам данной плоскости токи не потекут в виду равенства потенциалов на узлах. Исключим их на рисунке.



Упростим схему, заменив четыре ребра на один с эквивалентным сопротивлением:



Составим уравнение для нахождения сопротивления между клеммами AB

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R/2 + R/2} + \frac{1}{R/2 + R + R/2},$$

$$R_0 = \frac{2R}{3}.$$

Ответ: $R_0 = \frac{2R}{3}$