

МАЛАЯ ЛИГА

1. Гномики

1. Гномики хотят порвать канат, перетягивая его с двух сторон. Гномик-мудрец сказал, что канат порвется, если сила натяжения достигнет 1 Н. Гномики измерили свои силы и оказалось, что у каждого она равна $\frac{1}{8} \text{ Н}$. Какое количество гномиков понадобится, чтобы канат всё же порвался?

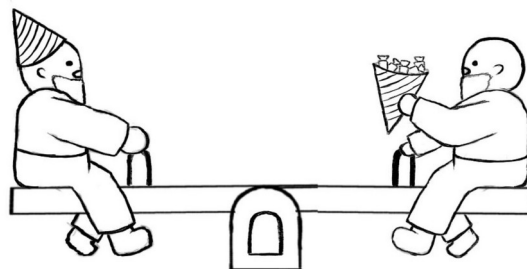


Решение:

Рассмотрим, для начала, другую ситуацию: пусть канат привязан к столбу. Тогда для разрыва потребуются 8 гномов, а сила реакции опоры, возникшая в столбе по третьему закону Ньютона, будет равна 1 Н. В случае, если второй конец каната тянут другие гномы, то они должны приложить такую же по модулю силу, противоположную по направлению (эквивалент силы реакции опоры столба). Следовательно, канат порвут 16 гномиков.

Ответ: 16 гномов.

2. Два гномика массой $M=800$ грамм каждый качались на невесомых качелях длиной $L=1$ метр, находясь равноудаленно от центра качели. Один из гномиков замечтался, взял кулёк, лежащий рядом с качелями, и съел сотню конфет, каждая массой $m=2$ грамма. На сколько сантиметров должен подвинуться наевшийся конфет гномик, чтобы качели вернулись в равновесие? Ответ дайте в сантиметрах.



Решение: Изначально массы гномиков и их расстояния до центра равны, тогда первоначальные моменты сил:

$$M \cdot L/2 = M \cdot L/2$$

После поедания конфет масса наевшегося гномика изменилась:

$$M_1 = M + 100 \cdot m = 1000 \text{ грамм}$$

Так как масса гномика увеличилась, расстояние от него до точки опоры должно уменьшиться. Зная что качели пришли в равновесие, распишем моменты сил:

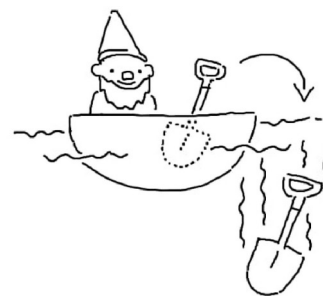
$$M \cdot L/2 = M_1 \cdot (L/2 - x)$$

$$x = (L/2 \cdot (M_1 - M)) / M_1$$

$$x = 10 \text{ см}$$

Ответ: 10 см (0,1 м).

3. Гномик на лодке перевозил лопату по озеру. В какой-то момент он подумал: «Зачем мне лопата?!» и выбросил её в озеро, после чего она пошла ко дну. Как при этом изменился уровень жидкости в озере?



Решение: 1. Когда гномик еще не выкинул свою лопату:

На лодку вместе с гномиком и лопатой действуют сила тяжести и сила Архимеда, лодка при этом находится в равновесии: $F_A = F_T$

$\rho_{жg}V_1 = F_{T1} + F_{T2}$, где F_{T1} и F_{T2} - это силы тяжести лодки с гномом и лопаты соответственно

$$\rho_{жg}V_1 = F_{T1} + m_{л}g, \text{ где } m_{л} - \text{масса лопаты}$$

$V_1 = (F_{T1}/\rho_{жg}) + (m_{л}/\rho_{ж})$ - объем воды, вытесненный лодкой с лопатой и гномом.

2. Когда гномик уже выкинул свою лопату:

В этом случае аналогичным способом составляем уравнение равновесия лодки с гномом, но уже без лопаты

$$F_A = F_{T1}$$

$$\rho_{жg}V_v = F_{T1} \Rightarrow V_v = F_{T1}/\rho_{жg} \text{ — объем воды, вытесненной лодкой с гномом.}$$

Но помимо этого жидкость вытесняется объемом лопаты $V_{л}$. Итого в этом случае объем V_2 вытесненной лодкой, гномом и лопатой жидкости равен:

$$V_2 = V_v + V_{л} = (F_{T1}/\rho_{жg}) + (m_{л}/\rho_{л})$$

Так как $\rho_{л} > \rho_{ж}$ (это следует из того, что лопата утонула), то $V_1 > V_2 \Rightarrow$ уровень воды до выброса лопаты был выше, чем после.

Ответ: уровень понизился.

4. Двум гномикам в лодке стало скучно (лопаты же уже нет) и они начали соревноваться в кидании конфет массой $m = 10$ грамм в колпак массой $M = 20$ грамм объемом $V = 100 \text{ см}^3$ посреди озера. Проигрывает тот, после чьего хода колпак тонет. Сколько конфет смогут закинуть гномики? Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.



Решение:

Изначально на колпак действуют сила Архимеда и сила тяжести, причем сила Архимеда больше, так как колпак не тонет.

Найдем N - максимально возможное количество конфет при котором $F_A = F_T$:

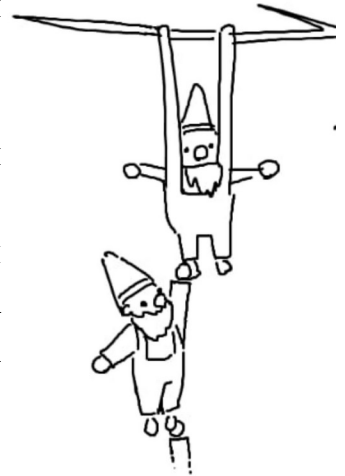
$$\rho gV = (M + N \cdot m)g$$

Найдем отсюда N:

$$N = (\rho g V - Mg)/mg = 8 \text{ конфет}$$

Ответ: 8 конфет.

5. Гномик зацепился подтяжками за ветку дерева и повис на высоте 1 м от уровня ветки. Общая высота дерева равна 10,9 м. Чтобы освободиться, гномику нужно подлететь до ветки, за которую он зацепился. Его друзья могут помочь и выкопать дерево, но лопата на дне озера. Решили прыгать, хватаясь за него: каждый прыжок растягивает подтяжки, и резко разом отпустить. Сколько друзей должны прыгнуть на висящего гномика, чтобы он освободился, если масса каждого гномика 500г?



Решение:

Для начала найдем коэффициент жесткости $kh=mg$, $k=mg/h=5 \text{ Н/м}$

Для того, чтобы гномик смог долететь до уровня ветки, потенциальной энергии пружины должно хватить, чтобы подняться до уровня ветки

$$(kx^2)/2=mgx$$

$$x(kx/2 - mg)= 0$$

$x=0$, что не подходит, так как это означает, что гномик уже на высоте ветки,

$$kx/2 = mg$$

$$x = 2mg/k = 2 \text{ м}$$

Найдем количество гномиков N, которое нужно для достижения удлинения

x

$$Nmg=kx$$

$$N=Kx/mg = 2 \text{ гнома}$$

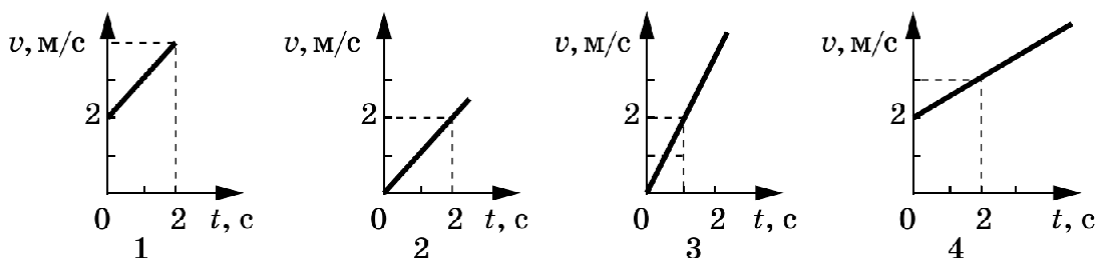
Так как один гном уже висит на подтяжках, то на помощь должен прийти 1

ГНОМ

Ответ: 1 гном.

2. Движение

1. Определите, какое из четырех тел, графики скорости которых изображены на рисунках, пройдет за 2с больший путь.



Решение:

Пройденный путь численно равен площади под графиком. Из представленных наибольшей площадью обладает трапеция под номером 1.

Ответ: 1 тело.

2. Камень падает из состояния покоя, оторвавшись от скалы. Сопротивление воздуха пренебрежимо мало. Во сколько раз изменится скорость камня в момент падения на землю, если высота, с которой падает камень, уменьшится в 4 раза?

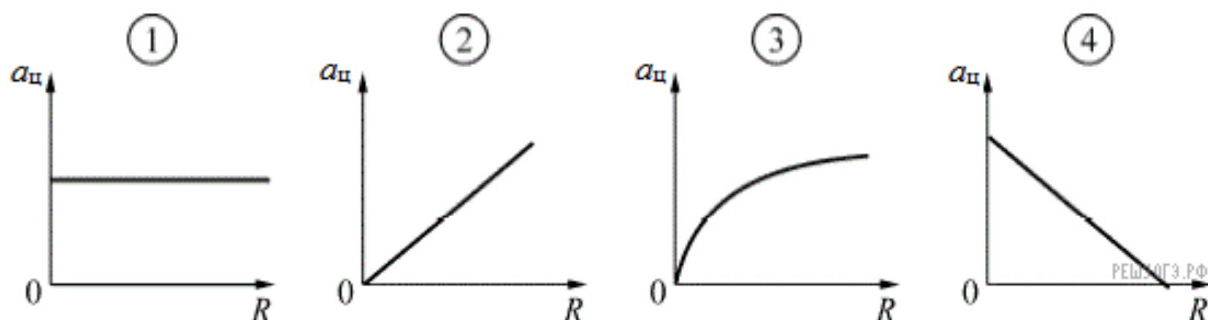
Решение:

При отсутствии сопротивления воздуха камень падает с ускорением свободного падения. Высота, с которой падает камень, определяется формулой $h = \frac{v^2}{2g}$. Из этой формулы следует, что при уменьшении высоты в 4 раза скорость приземления уменьшится в 2 раза.

Таким образом, изменение скорости равно $\frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Ответ: 0,5 (1/2).

3. Диск равномерно вращается вокруг оси, которая перпендикулярна плоскости диска и проходит через его центр. К плоскости диска прилипли мелкие песчинки. Четыре ученика нарисовали график зависимости центростремительного ускорения $a_{ц}$ песчинки от ее расстояния R до центра диска. Какой график является правильным?



Решение:

Центростремительное ускорение рассчитывается по формуле $a_{ц} = \frac{v^2}{R}$, где v — скорость точки на диске, а R — расстояние от центра диска до той точки. Скорость точки вращающегося тела рассчитывается по формуле $v = \omega R$, следовательно, $a_{ц} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$. Зависимость центростремительного ускорения от радиуса — линейная, причем, если радиус равен нулю, то и центростремительное ускорения равно нулю. Следовательно, верный график указан под номером 2.

Ответ: 2.

4. При скорости ветра 20 м/с скорость капель дождя 40 м/с. Какой будет скорость капель при скорости ветра 5 м/с.

Решение:

Скорость капель в безветренную погоду: $V_0 = \sqrt{40^2 - 20^2}$

Скорость капель при ветре 5 м/с : $V = \sqrt{V_0^2 + 5^2} = \sqrt{40^2 - 20^2 + 5^2} = 35 \text{ м/с}$

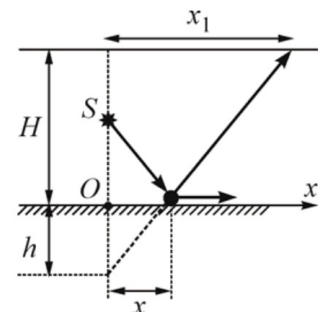
Ответ: 35 м/с.

5. Под настольной лампой, находящейся на высоте $h = 1 \text{ м}$ над поверхностью стола, по столу проложены прямые рельсы (проходящие строго под лампой). По ним со скоростью $V = 1 \text{ м/с}$ катится маленькая тележка с лежащим на ней горизонтально зеркальцем. С какой скоростью u бежит светлое пятнышко по потолку? Высота потолка над поверхностью стола $H = 2 \text{ м}$.

Решение:

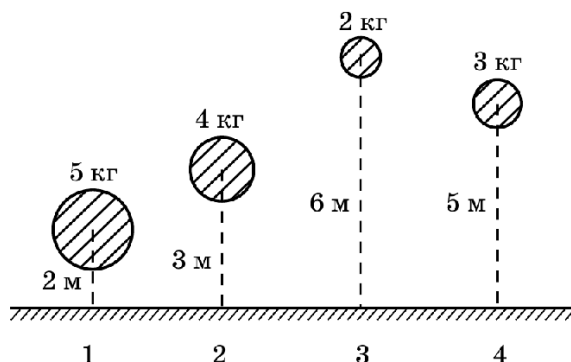
Изобразим ход лучей на рисунке. Координата светлого пятна x_1 связана с координатой тележки x соотношением подобия $x_1 : x = (H + h) : h$. Принимая в качестве начала отсчета времени момент прохождения тележки под лампой, запишем зависимость координаты x тележки от времени t : в силу равномерности движения эта зависимость имеет вид $x = Vt$. Отсюда $x_1 = \frac{H + h}{h} Vt$. Следовательно, скорость пятна

$$u = \frac{x_1}{t} = \frac{H + h}{h} V = 3 \text{ м/с}.$$

**Ответ: 3 м/с.**

3. Работа. Энергия. Тепло

1. Четыре тела подняты относительно земли. Большей потенциальной энергией обладает тело:



Решение: $E = mgh$

$$E_1 = 100 \text{ Дж}$$

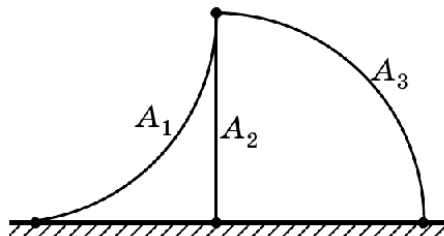
$$E_2 = 120 \text{ Дж}$$

$$E_3 = 120 \text{ Дж}$$

$$E_4 = 150 \text{ Дж}$$

Ответ: 4 тело.

2. Тела одинаковой массы падают из одной точки по траекториям, изображенным на рисунке. В каком случае совершается большая работа силы тяжести?



Решение: $A = Fs$, где A — работа, F — сила и s — перемещение. В данной задаче перемещение всех трех тел равной массы одинаковое, следовательно совершаемая работа тоже одинаковая.

Ответ: Во всех приведенных случаях работа одинаковая.

3. Мальчик решил приготовить леденцы. Для этого он насыпает в ложку 6 г сахара и нагревает на электрической плите, пока сахар не расплавится. Сколько таких леденцов приготовил мальчик, если всего затратил 15 кДж. Температура на кухне 20 °С, температура плавления сахара 170 °С, удельная теплоемкость сахарного песка равна 1250 Дж*С/кг, удельная теплота плавления равна 56 кДж/кг.

Решение:

Найдем, сколько энергии требуется, чтобы из $m = 6$ грамм сахара получить леденец:

$Q_{\text{л}} = m \cdot c \cdot (t_{\text{плав}} - t_{\text{окр}}) + m \cdot \lambda = 0,006 \cdot 1250 \cdot (170 - 20) + 0,006 \cdot 56000 = 1461$ Дж.

Дальше найдем количество леденцов N , на которые хватит энергии:

$N = Q / Q_{\text{л}} = 15000 / 1461 = 10,27$, но леденцов не может быть дробное количество, т.к. это означает, что энергии не хватило на плавление следующего леденца $\Rightarrow$ всего мальчик приготовил 10 леденцов

Ответ: 10 леденцов.

4. При подъеме груза электромотор в течение времени $0,5t$ развивал мощность $8N$, а затем в течение времени $2t$ — мощность $3N$. С какой средней мощностью должен был работать мотор, чтобы за то же время поднять этот же груз?

Решение:

$$N_{\text{ср}} = \frac{0,5t \cdot 8N + 2t \cdot 3N}{0,5t + 2t} = \frac{10Nt}{2,5t} = 4N$$

Ответ: $4N$.

5. Свинцовая пуля пробивает деревянную стену, причем скорость в момент удара о стену была 400 м/с, а после прохождения стены — 300 м/с. Температура пули в момент удара $T_0 = 323$ К. Какая часть пули расплавилась, если удельная теплота плавления свинца $= 2,5 \cdot 10^4$ Дж/К, температура плавления $T = 600$ К, удельная теплоемкость $c = 125$ Дж/кг $\cdot$ К. Считать, что все выделяющееся тепло получает пуля.

Решение:

Тепло Q , выделившееся при ударе, равно уменьшению кинетической энергии пули. Это тепло пошло на нагревание пули до температуры плавления и на то, чтобы расплавить часть пули:

$$Q = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2} = mc(T - T_0) + \lambda m_1,$$

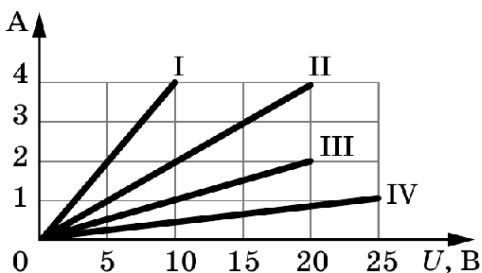
где m — масса пули, m_1 — масса расплавившегося свинца. Отсюда

$$\frac{m_1}{m} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} - c(T - T_0) \right] = 0,015.$$

Ответ: 0,015 (1,5%).

4. Электричество

1. Даны графики зависимости силы тока I , А от напряжения для четырех проводников. Какой проводник обладает бо́льшим сопротивлением?



Решение:

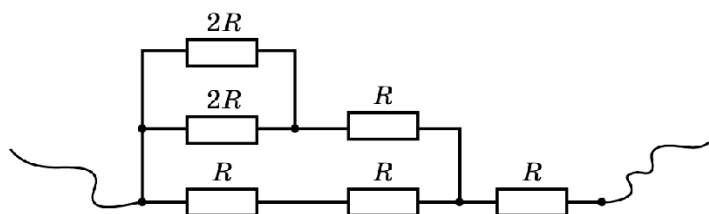
$$R = \frac{U}{I}$$

Из закона Ома имеем для нахождения сопротивления:

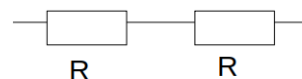
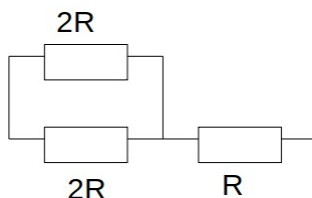
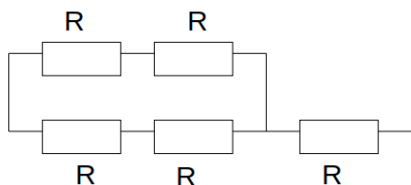
При равном значении силы тока сопротивление будет больше у того проводника, у которого на графике имеем больше значение напряжения.

Ответ: 4 проводник (IV).

2. Найдите общее сопротивление цепи при соединении, показанном на рисунке



Решение: Найдем сопротивление на отдельных участках и составим эквивалентные схемы.



Ответ: $2R$.

3. Из куска проволоки сопротивлением $R = 5$ Ом сделано кольцо. Провода, подводящие ток, делят кольцо на дуги, длины которых относятся как $1 : 9$. Чему стало равно сопротивление кольца?

Решение: Отношение длин дуг, на которое разделили кольцо равно отношению сопротивлений этих дуг, следовательно, $R_1 = 9R_2$.

Сопротивление $R = R_1 + R_2 = 10R_2$.

Следовательно: $R_2 = \frac{R}{10} = 0,5$ Ом, $R_1 = 4,5$ Ом.

После подсоединения проводов дуги будут соединены параллельно и

сопротивление станет $r = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{0,5 \cdot 4,5}{5} = 0,45$ Ом.

Ответ: 0,45 Ом.

4. Трамвай массой $m=22,5$ т движется со скоростью $v=36$ км/ч по горизонтальному пути. Коэффициент трения $\mu = 0,01$, напряжение в линии $U = 500$ В, общий КПД двигателя и передачи $\eta = 75\%$. Определить силу тока в моторе.

Решение: При движении по горизонтальному пути мощность расходуется на преодоление силы трения, поэтому можем записать:

$$P = F_{\text{тр}} v = \mu m g v .$$

$$\eta = \frac{P_{\text{пол}}}{P_{\text{затр}}} , \quad P_{\text{затр}} = I \cdot U , \quad \text{тогда} \quad P_{\text{пол}} = \eta \cdot IU .$$

Из первого и последнего выражений получим: $\mu m g v = \eta \cdot IU .$

$$I = \frac{\mu m g v}{\eta U} = 60 \text{ А} .$$

Ответ: 60 А.

5. Трубка заполнена ртутью. Во сколько раз изменится сопротивление этой трубки, если её растянутой в 1,5 раза?

Решение:

При растяжении трубки в 1,5 раза, объем трубки с ртутью должен оставаться постоянным: $V_1 = V_2, \quad l_1 S_1 = l_2 S_2.$

Таким образом, можно выразить площадь трубки до растяжения: $S_1 = \frac{l_2 S_2}{l_1},$
 $S_1 = 1,5 S_2.$

Теперь необходимо записать сопротивление двух трубок:

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S_1}, \quad R_2 = \rho \frac{l_2}{S_2}.$$

Найдем отношение сопротивлений: $\frac{R_2}{R_1} = \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2}.$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{1,5 \cdot 1,5 \cdot S_2}{S_2} = 2,25 \text{ раза}.$$

Ответ: 2,25 раза.